1

(1)

関数 $f_n(x)$ は

$$f_n(x)=\frac{1}{(2-x)^n}+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2+x)^n}$$

と与えられているので，$f_n(x)$ の導関数 $f_n'(x)$ は

$$\begin{aligned}f_n'(x)&=(-1)\cdot\frac{(-n)}{(2-x)^{n+1}}+(-1)^{n-1}\frac{(-n)}{(2+x)^{n+1}}\\&=n\left\{\frac{1}{(2-x)^{n+1}}+(-1)^n\frac{1}{(2+x)^{n+1}}\right\}\\&=nf_{n+1}(x)\end{aligned}$$

となる。

(答) $f_n'(x)=nf_{n+1}(x)$

(2)

部分積分を用いれば

$$\begin{aligned}I_n&=\int_0^1(1-x)^{n-1}f_n(x)\,dx\\&=\left[\frac{-1}{n}(1-x)^n f_n(x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{-1}{n}(1-x)^n f_n'(x)\,dx\\&=\frac{1}{n}f_n(0)+\frac{1}{n}\int_0^1\frac{1}{n}(1-x)^n nf_{n+1}(x)\,dx\\&=\frac{1}{n}f_n(0)+I_{n+1}\end{aligned}$$

となる。ここで，$f_n(0)$ は

$$f_n(0)=\frac{1}{2^n}+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{n-1}} & (n\text{ が奇数})\\ 0 & (n\text{ が偶数})\end{cases}$$

であるから

$$I_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{n-1}n}+I_{n+1} & (n\text{ が奇数})\\ I_{n+1} & (n\text{ が偶数})\end{cases}$$

となる。よって題意は示された。

(証明終)

(3)

区間 $0\leqq x\leqq 1$ において

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\leqq\dfrac{1}{2-x}\leqq 1\\ \dfrac{1}{3}\leqq\dfrac{1}{2+x}\leqq\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

であることに注意して $\dfrac{1}{(2-x)^n}+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2+x)^n}$ の大小関係を考えれば

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\leqq\frac{1}{(2-x)^n}+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2+x)^n}\leqq 1^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

であるから

$$0\leqq f_n(x)<2$$

となる。ここから，全体に $(1-x)^{n-1}$ を掛けて区間 $[0,1]$ において積分すれば

$$0\leqq\int_0^1(1-x)^{n-1}f_n(x)\,dx<\int_0^1(1-x)^{n-1}\cdot 2\,dx$$

となる。ここで，最右辺について

$$\begin{aligned}\int_0^1(1-x)^{n-1}\cdot 2\,dx&=\left[\frac{-1}{n}(1-x)^n\cdot 2\right]_0^1\\&=\frac{2}{n}\end{aligned}$$

であるから，

$$0\leqq I_n\leqq\frac{2}{n}$$

となる。よって題意は示された。

(証明終)

(4)

(2)の結果において，自然数 n の偶奇を自然数 m を用いて書き換えれば

$$I_{2m-1}=\frac{1}{2^{2(m-1)}(2m-1)}+I_{2m}$$

$$I_{2m}=I_{2m+1}$$

となる。ここで I_{2m} を消去すれば

$$I_{2m-1}=\frac{1}{2^{2(m-1)}(2m-1)}+I_{2m+1}$$

を得る。よって

$$I_{2m-1}=I_1-\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{4^{k-1}(2k-1)}$$

を得る。一方で，I_1 は

$$\begin{aligned}I_1&=\int_0^1\left(\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}\right)dx\\&=\left[-\log|2-x|+\log|2+x|\right]_0^1\\&=\log\left|\frac{2+1}{2-1}\right|-\log\left|\frac{2-0}{2+0}\right|\\&=\log 3\end{aligned}$$

である。また，(3)の結果から，I_{2m-1} は

$$0\leqq I_{2m-1}\leqq\frac{2}{2m-1}$$

となるから，$m\to\infty$ の極限を取れば $\dfrac{2}{2m-1}\to 0$ となる。よってはさみうちの原理を用いて

$$\lim_{m\to\infty}I_{2m-1}=0$$

となるので，

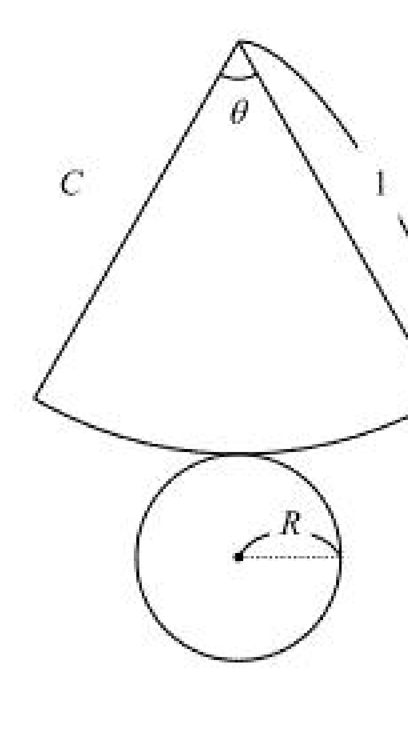
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^{k-1}(2k-1)}=\log 3$$

となる。

(証明終)

$\boxed{2}$

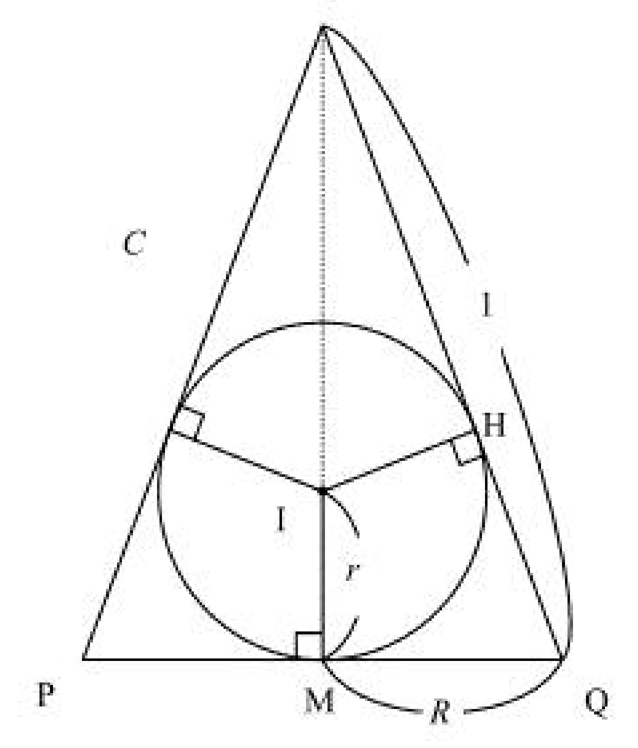
(1)



上図のように円錐を展開した図を考えれば，扇型の弧の長さと底面の円周の長さは等しいことから

$$2\pi R=\theta\cdot 1\Leftrightarrow R=\frac{\theta}{2\pi}$$

となる。また，底面に垂直で，底面の円の中心を通る面で切った時の断面を考え，以下の図のように記号をつける。



このとき，線分 OM の長さは△OMQ における三平方の定理から

$$\mathrm{OM}=\sqrt{1-R^2}$$

と表される。一方で，OH の長さが $1-R$ であることから，△OIH における三平方の定理を用いると共に IM の長さから，線分 OM は

$$\mathrm{OM}=\sqrt{(1-R)^2+r^2}+r$$

とも表される。両者は等しいので，$0<R<1$ であることに注意してこれを書き換えれば

$$\begin{aligned}&\sqrt{1-R^2}=\sqrt{(1-R)^2+r^2}+r\\&\Leftrightarrow\sqrt{1-R^2}-r=\sqrt{(1-R)^2+r^2}\\&\Leftrightarrow 1-R^2+r^2-2r\sqrt{1-R^2}=(1-R)^2+r^2\\&\Leftrightarrow 2R-2R^2=2r\sqrt{1-R^2}\\&\Leftrightarrow r=\frac{R(1-R)}{\sqrt{1-R^2}}\end{aligned}$$

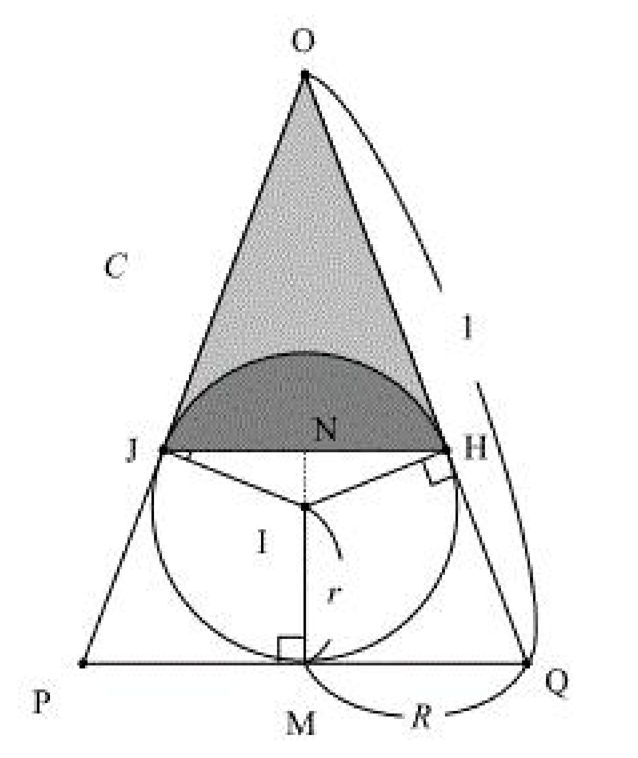
となる。ここから，$R=\dfrac{\theta}{2\pi}$ を代入して

$$\begin{aligned}r&=\frac{\frac{\theta}{2\pi}\left(1-\frac{\theta}{2\pi}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^2}}\\&=\frac{\theta\left(1-\frac{\theta}{2\pi}\right)\theta}{\sqrt{4\pi^2-\theta^2}}\\&=\frac{\theta(2\pi-\theta)\sqrt{4\pi^2-\theta^2}}{2\pi\left(4\pi^2-\theta^2\right)}\\&=\frac{\theta\sqrt{4\pi^2-\theta^2}}{2\pi(2\pi+\theta)}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\dfrac{\theta\sqrt{4\pi^2-\theta^2}}{2\pi(2\pi+\theta)}$

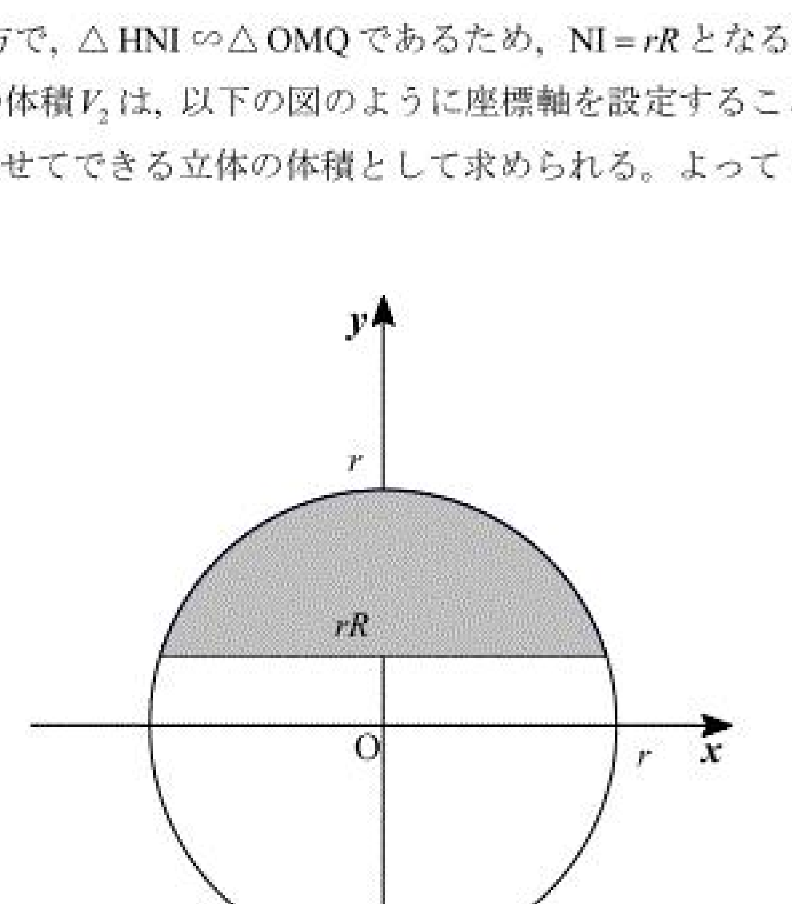
(2)



上の断面図に示すように，求める部分 A の体積は，JH を直径に持つ円を底面とする円錐の体積 V_1 から，濃い斜線部で示した球 B の一部分の体積 V_2 を取り除くことで求められる。ここで，△ONH ∽ △OMQ であり，OH : HQ $=1-R:1$ であることから 体積 V_1 は

$$V_1=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot\sqrt{1-R^2}\cdot(1-R)^3$$

と，求められる。一方で，△HNI ∽ △OMQ であるため，NI $=rR$ となるから，濃い斜線部で示した球 B の一部分の体積 V_2 は，以下の図のように座標軸を設定することで，斜線部の領域を y 軸の周りに回転させてできる立体の体積として求められる。よって



$$\begin{aligned}V_2&=\int_{rR}^{r}\pi x^2dy\\&=\pi\int_{rR}^{r}\left(r^2-y^2\right)dy\\&=\pi\left[r^2y-\frac{y^3}{3}\right]_{rR}^{r}\\&=\pi\left\{\frac{2}{3}r^3-r^3R\left(1-\frac{R^2}{3}\right)\right\}\\&=\frac{\pi}{3}r^3\left(2-3R+R^3\right)\end{aligned}$$

となる。(1)の結果を用いれば r は書き換えられて

$$\begin{aligned}V_2&=\frac{\pi}{3}\left\{\frac{R(1-R)}{\sqrt{1-R^2}}\right\}^3\left(2-3R+R^3\right)\\&=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{R^3(1-R)^3}{\left(1-R^2\right)\sqrt{1-R^2}}(1-R)\left(2-R-R^2\right)\\&=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{R^3(1-R)^3}{\left(1-R^2\right)^2}\sqrt{1-R^2}(1-R)^2(2+R)\\&=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{R^3(1-R)^3(2+R)\sqrt{1-R^2}}{(1+R)^2}\end{aligned}$$

となる。よって求める体積 V は

$$\begin{aligned}V&=V_1-V_2\\&=\frac{\pi}{3}R^2(1-R)^3\sqrt{1-R^2}-\frac{\pi}{3}\cdot\frac{R^3(1-R)^3(2+R)\sqrt{1-R^2}}{(1+R)^2}\\&=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{R^2(1-R)^3\sqrt{1-R^2}}{(1+R)^2}\left\{(1+R)^2-R(2+R)\right\}\\&=\frac{\pi R^2(1-R)^3\sqrt{1-R^2}}{3(1+R)^2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\dfrac{\pi R^2(1-R)^3\sqrt{1-R^2}}{3(1+R)^2}$

(3)

側面の面積 S は OH の長さが $1-R$ であることから

$$\begin{aligned}S&=\frac{\theta}{2}(1-R)^2\\&=\pi R(1-R)^2\end{aligned}$$

と与えられる。ここから $\dfrac{V}{S}$ は

$$\frac{V}{S}=\frac{R(1-R)\sqrt{1-R^2}}{3(1+R)^2}$$

となる。両辺を3倍して2乗すると，

$$\left(\frac{3V}{S}\right)^2=\frac{R^2(1-R)^2}{(1+R)^2}$$

となる。ここで，$\dfrac{V}{S}>0$ であることから

$$\left(\frac{3V}{S}\right)^2\text{が最大}\Leftrightarrow\frac{V}{S}\text{が最大}$$

といえるので，$\dfrac{V}{S}$ の最大は，関数 $f(R)$ を

$$f(R)=\frac{R^2(1-R)^2}{(1+R)^2}$$

として，この $f(R)$ に関する最大値を考えればよい。このとき，$f(R)$ の導関数 $f'(R)$ は

$$\begin{aligned}f'(R)&=\frac{\left\{2R(1-R)^3-3R^2(1-R)^2\right\}(1+R)^3-R^2(1-R)^3\cdot 3(1+R)^2}{(1+R)^6}\\&=\frac{R(1-R)^2}{(1+R)^4}\left[\left\{2(1-R)-3R\right\}(1+R)-3R(1-R)\right]\\&=\frac{R(1-R)^2}{(1+R)^4}\left(-2R^2-6R+2\right)\\&=-2\frac{R(1-R)^2}{(1+R)^4}\left(R^2+3R-1\right)\end{aligned}$$

となる。θ は $0<\theta<2\pi$ なので，R は $0<R<1$ となる。このときの $f'(R)$ の正負を考えることで，以下の増減表を得る。

R	(0)	$\cdots$	$\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(R)$		+	0	−	
$f(R)$		↗		↘	

これより，$f(R)$ が最大，すなわち $\dfrac{V}{S}$ が最大となるのは

$$R=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$$

となるときであり，このとき(1)より

$$\begin{aligned}\theta&=2\pi R\\&=\left(\sqrt{13}-3\right)\pi\end{aligned}$$

となる。

(答) $\left(\sqrt{13}-3\right)\pi$

$\boxed{3}$

(1)

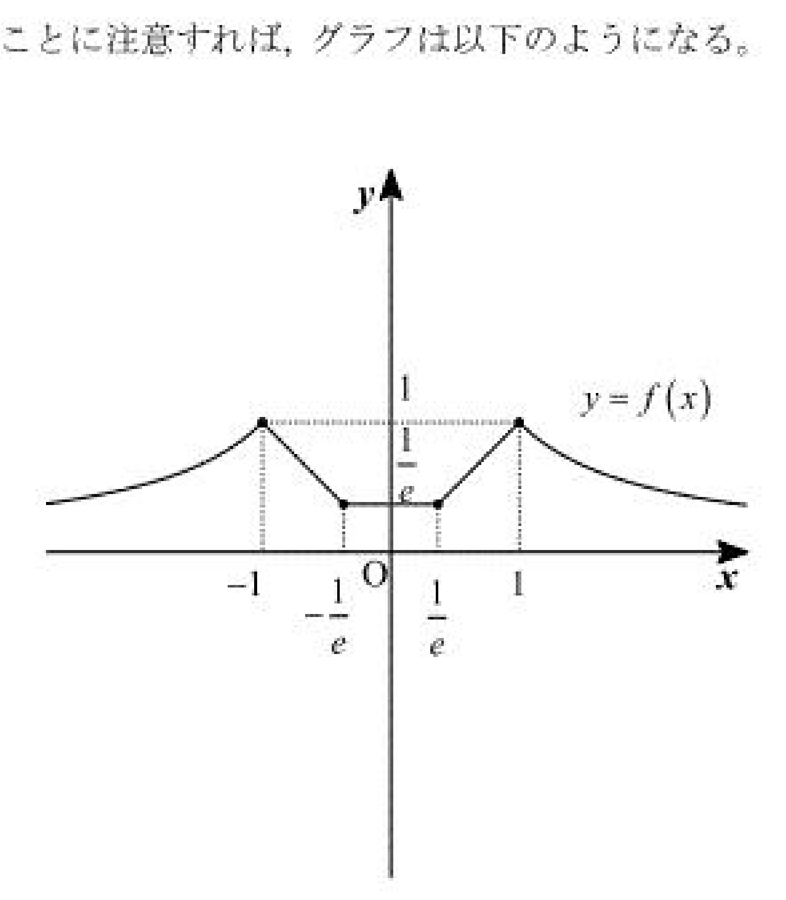
関数$g(x)$は$g(x)=g(-x)$を満たすため，$y=g(x)$のグラフはy軸に関して対称であり，それを踏まえた上でさらにxについて場合分けを行えばよい。絶対値を外して関数$g(x)$の全体を書き換えれば$x>0$において

$$g(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\left|-(\log x+1)+\log x-1\right|=-1 & \left(0<x<\dfrac{1}{e}のとき\right) \\ -\dfrac{1}{2}\left|(\log x+1)+\log x-1\right|=\log x & \left(\dfrac{1}{e}\leqq x<1のとき\right) \\ -\dfrac{1}{2}\left|(\log x+1)+\log x-1\right|=-\log x & (1\leqq xのとき) \end{cases}$$

であるから，これを用いれば$f(x)$は

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1}=\dfrac{1}{e} & \left(0<x<\dfrac{1}{e}のとき\right) \\ e^{\log x}=x & \left(\dfrac{1}{e}\leqq x<1のとき\right) \\ e^{-\log x}=\dfrac{1}{x} & (1\leqq xのとき) \end{cases}$$

となる。$y=f(x)$のグラフは正負に関して対称であり，$f(0)=\dfrac{1}{e}$であることから関数$f(x)$は$f(0)$で連続であることに注意すれば，グラフは以下のようになる。



(答) 前図

(2)

Cのx座標はBのx座標よりも大きいとする。$\mathrm{A}(0,\ f(0))$のとき，曲線$y=\dfrac{1}{x}$, $y=-\dfrac{1}{x}$は下に凸な曲線であるから，△ABCが$y\leqq f(x)$に含まれ，面積が最大となるようにB, Cを取ると，辺ACは曲線$y=\dfrac{1}{x}$に，辺ABは曲線$y=-\dfrac{1}{x}$に接することとなる。ここで，曲線$y=\dfrac{1}{x}$上の点$(t,\ f(t))$(ただし$t>1$)における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y&=-\frac{1}{t^2}(x-t)+\frac{1}{t} \\ &=-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t} \end{aligned}$$

であるから，接線は点$(2t,\ 0)$を通る。この接線が$t>1$で点$\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{1}{e}\right)$を通るとき，

$$\frac{1}{e}=\frac{2}{t}\Leftrightarrow t=2e\ (\because t>1)$$

より$\mathrm{C}(4e,\ 0)$となり，対称性から$\mathrm{B}(-4e,\ 0)$となる。よって

$$\begin{aligned} S(0)&=(4e+4e)\cdot\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{2} \\ &=4 \end{aligned}$$

となる。

(答) $S(0)=4$

(3)

(2)と同様に考えると，$y=f(x)$のグラフは正負に対して対称であるため，$a\geqq 0$について考えればよい。以下，aの値により場合分けをして考える。

[1] $0\leqq a\leqq\dfrac{1}{e}$のとき

辺ACが曲線$y=\dfrac{1}{x}$に，辺ABが曲線$y=-\dfrac{1}{x}$に接する時，面積は最大となる。ここで，曲線$y=-\dfrac{1}{x}$上の点$(s,\ f(s))$(ただし$s<-1$)における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y&=\frac{1}{s^2}(x-s)-\frac{1}{s} \\ &=\frac{1}{s^2}x-\frac{2}{s} \end{aligned}$$

であるから，接線は点$(2s,\ 0)$を通る。この接線が$s<-1$で点$\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{e}\right)$を通るとき，方程式

$$\begin{aligned} &\frac{1}{e}=\frac{1}{s^2}a-\frac{2}{s} \\ &\Leftrightarrow s^2+2es-ae=0\ (\because s<-1) \end{aligned}$$

が成り立つ。よってこれを解いて

$$s=-e-\sqrt{e^2+ae}\ (\because s<-1)$$

となり，$\mathrm{B}\left(-2\left(e+\sqrt{e^2+ae}\right),\ 0\right)$である。また，曲線$y=\dfrac{1}{x}$上の点$(t,\ f(t))$(ただし$t>1$)における接線は(2)より，点$(2t,\ 0)$を通り

$$y=-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t}$$

で表される直線である。この接線が$t>1$で点$\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{e}\right)$を通るとき，方程式

$$\begin{aligned} &\frac{1}{e}=-\frac{1}{t^2}a+\frac{2}{t} \\ &\Leftrightarrow t^2-2et+ae=0\ (\because t>1) \end{aligned}$$

が成り立つ。よってこれを解いて

$$t=e+\sqrt{e^2-ae}\ (\because t>1)$$

となり，$\mathrm{C}\left(2\left(e+\sqrt{e^2-ae}\right),\ 0\right)$である。このとき底辺BCの長さは

$$2\left(e+\sqrt{e^2-ae}\right)-\left\{-2\left(e+\sqrt{e^2+ae}\right)\right\}=2\left(2e+\sqrt{e^2-ae}+\sqrt{e^2+ae}\right)$$

となるので，ここで関数$h(a)$を

$$h(a)=2\left(2e+\sqrt{e^2-ae}+\sqrt{e^2+ae}\right)$$

とすれば，$h(a)$の増減が△ABCの底辺BCの増減を決めることになる。ここで，$h(a)$の導関数$h'(a)$は

$$\begin{aligned} h'(a)&=\frac{-e}{\sqrt{e^2-ae}}+\frac{e}{\sqrt{e^2+ae}} \\ &=e\left(\frac{-1}{\sqrt{e^2-ae}}+\frac{1}{\sqrt{e^2+ae}}\right) \\ &=e\left(\frac{-\sqrt{e^2+ae}+\sqrt{e^2-ae}}{\sqrt{e^4-a^2e^2}}\right) \\ &=\frac{\sqrt{1-\dfrac{a}{e}}-\sqrt{1+\dfrac{a}{e}}}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{e^2}}} \end{aligned}$$

となる。分母は$0\leqq a\leqq\dfrac{1}{e}$で常に正，分子は$a>0$で負であることから$h(a)$は$0\leqq a\leqq\dfrac{1}{e}$において単調減少である。即ち

$$h(a)<h(0)\ (a>0)$$

となるので，底辺BCの長さが最大となるのは$a=0$のときである。よって，高さが一定であることから

$$S(a)\leqq S(0)$$

が成り立つ。

[2] $\dfrac{1}{e}<a<1$のとき

直線ABは直線$y=x$に一致するため$\mathrm{B}(0,\ 0)$である。また，曲線$y=\dfrac{1}{x}$上の点$(t,\ f(t))$(ただし$t>1$)における接線が点$\mathrm{A}(a,\ a)$を通るとき，方程式

$$\begin{aligned} &a=-\frac{1}{t^2}a+\frac{2}{t} \\ &\Leftrightarrow at^2-2t+a=0\ (\because t>1) \end{aligned}$$

が成り立つ。よってこれを解いて，

$$t=\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{a}\ (\because t>1)$$

となり，(2)より$\mathrm{C}\left(\dfrac{2\left(1+\sqrt{1-a^2}\right)}{a},\ 0\right)$である。したがって，三角形の面積$S(a)$について

$$\begin{aligned} S(a)&=\frac{2\left(1+\sqrt{1-a^2}\right)}{a}\cdot a\cdot\frac{1}{2} \\ &=1+\sqrt{1-a^2} \\ &<1+1 \\ &<S(0) \end{aligned}$$

が成り立つ。

[3] $1\leqq a$のとき

△ABCの面積は$S(a)$は，点Aから曲線$y=-\dfrac{1}{x}$に向かって引いた接線とx軸の交点B'と点Cを結んだ線分B'Cを底辺とし点Aを頂点として作った三角形の面積$T(a)$以下となる。ここで，直線AB'のx切片は，

$$y=\frac{1}{s^2}x-\frac{2}{s}$$

が点$\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$を通るときの$x$切片なので，次の方程式

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a}=\frac{1}{s^2}a-\frac{2}{s} \\ &\Leftrightarrow s^2+2as-a^2=0\ (\because s<-1) \end{aligned}$$

が成り立つ。よってこれを解いて

$$s=-\left(1+\sqrt{2}\right)a\ (\because s<-1)$$

となるから，$\mathrm{B'}\left(-\left(1+\sqrt{2}\right)a,\ 0\right)$である。また，直線ACが曲線$y=\dfrac{1}{x}$上の点Aにおける接線であることから，(2)より$\mathrm{C}(2a,\ 0)$である。したがって，$T(a)$は

$$\begin{aligned} T(a)&=\left\{2a+2\left(1+\sqrt{2}\right)a\right\}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2} \\ &=2+\sqrt{2} \end{aligned}$$

となり，

$$\begin{aligned} S(a)&\leqq T(a) \\ &=2+\sqrt{2} \\ &<4 \\ &=S(0) \end{aligned}$$

が成り立つ。

以上, [1], [2], [3]より，$a\geqq 0$について

$$S(a)\leqq S(0)$$

となることが示され，$a<0$についても同様に考えられるため，任意の実数aについて題意が成り立つことが示された。

(証明終)

4

(1)

まず，カードを全ての頂点に割り当てる方法は${}_{10}\mathrm{P}_8$通りある。次に，合計が偶数となるような割り当て方であるが，1～10までの数の合計が55であることから，割り当てない2つの数の合計が奇数であればよい。2つの数の合計が奇数となる時は，偶数と奇数がそれぞれ1つずつとなる選び方である。これを8つの頂点に割り当てるので合計は${}_5\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_1\cdot 8!$通りである。よって，求める確率は

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_1\cdot 8!}{{}_{10}\mathrm{P}_8}=\frac{5}{9}$$

となる。

(答) $\frac{5}{9}$

(2)

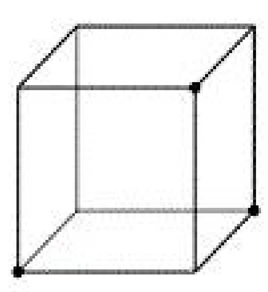
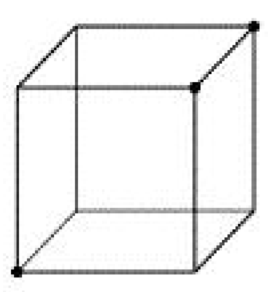
頂点に割り当てる8つの数の偶数と奇数の個数の組み合わせは，(偶数の数，奇数の数)として表せば

$(5,3),(4,4),(3,5)$

のいずれかである。この各々の組に対して実際に頂点に偶数と奇数を割り当てていくと，その並べ方は以下のように場合分けできる。

[1] $(5,3)$の場合

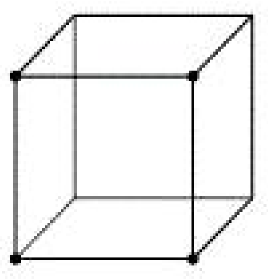
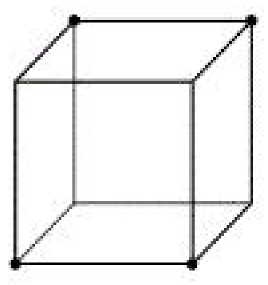
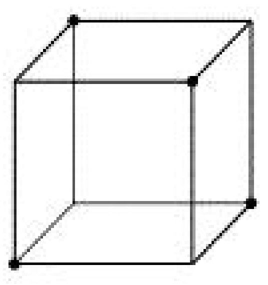
頂点に対して奇数を割り当てる方法は3通りあり，そのいずれも偶数面が3個存在する。

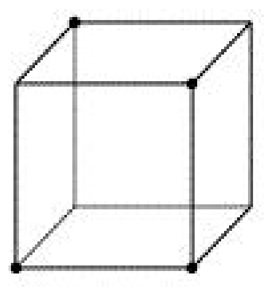
[2] $(4,4)$の場合

頂点に対して奇数を割り当てる割り当て方は，偶数面の数により次のように場合分けできる。

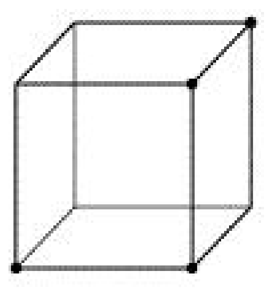
[i] 6個となるものが以下の3通り存在する。

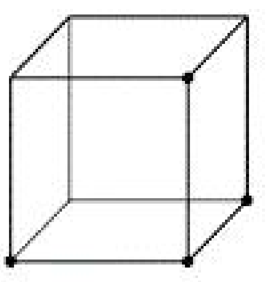
[ii] 4個となるものが以下の1通り存在する。



[iii] 2個となるものが以下の1通り存在する。



[iv] 0個となるものが以下の1通り存在する。



[3] $(3,5)$の場合

[1]と同様に3通りあり，そのいずれも偶数面が3個存在する。

以上より，題意を満たす割り当て方は[1]または[3]のどちらかの場合であるから，求める確率は

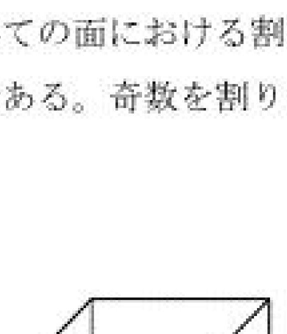
$$2\cdot\frac{{}_5\mathrm{C}_3\cdot{}_5\mathrm{C}_5\cdot 8!}{{}_{10}\mathrm{P}_8}=\frac{4}{9}$$

となる。

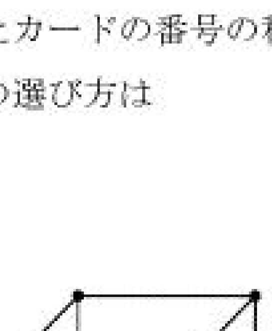
(答) $\frac{4}{9}$

(3)

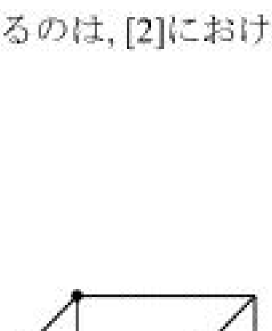
すべての面における割り当てられたカードの番号の和が偶数となるのは，[2]における[i]の場合である。奇数を割り当てる頂点の選び方は



面の選び方と考えて
6通り



辺の組の選び方と考えて
6通り



頂点の選び方を考えて
2通り

となる。よって合計で14通り存在するので，求める確率は

$$14\cdot\frac{{}_5\mathrm{P}_4\cdot{}_5\mathrm{P}_4}{{}_{10}\mathrm{P}_8}=\frac{1}{9}$$

となる。

(答) $\frac{1}{9}$

(4)

すべての面における割り当てられたカードの番号の和が奇数となるのは，[2]における[iv]の場合である。図より，3つの奇数と隣り合う頂点を選べば，残りの3つの頂点が決まる。よって頂点の選び方は8通り存在するので，求める確率は

$$8\cdot\frac{{}_5\mathrm{P}_4\cdot{}_5\mathrm{P}_4}{{}_{10}\mathrm{P}_8}=\frac{4}{63}$$

となる。

(答) $\frac{4}{63}$