

(1)

x, y, z について、平均の定義から、

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k$$

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

となる。共分散の定義より、

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})$$

となるが、これを整理すると、

$$\begin{aligned} s_{xy} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k y_k - x_k \bar{y} - \bar{x} y_k + \bar{x} \bar{y}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k - \bar{y} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - \bar{x} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k + \bar{x} \bar{y} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k - \bar{x} \bar{y} - \bar{x} \bar{y} + \bar{x} \bar{y} \\ &= \bar{z} - \bar{x} \bar{y} \end{aligned}$$

となる。以上から、題意は示された。

(証明終)

(2)

l は n の約数であるから、自然数 s を用いて $n = sl$ と表すことができる。ここで、 k は整数 t_k と l 以下の自然数 u_k を用いて

$$k = t_k l + u_k$$

と表すことが出来る。 $1 \leq k \leq n$ であるから、 $0 \leq t_k \leq s-1$ 、 $1 \leq u_k \leq l$ となる。すると、

$$\begin{aligned} x_k &= R_l(k-1)+1 \\ &= R_l(t_k l + u_k - 1) + 1 \\ &= u_k - 1 + 1 \\ &= u_k \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{s-1} \left(\sum_{q=1}^l u_{pl+q} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{s-1} \left(\sum_{q=1}^l q \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{s-1} \frac{l(l+1)}{2} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{sl(l+1)}{2} \\ &= \frac{l+1}{2} \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 &= \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{s-1} \left(\sum_{q=1}^l u_{pl+q}^2 \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{s-1} \left(\sum_{q=1}^l q^2 \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{s-1} \frac{l(l+1)(2l+1)}{6} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{sl(l+1)(2l+1)}{6} \\ &= \frac{(l+1)(2l+1)}{6} \end{aligned}$$

となる。以上から、 x の分散 s_x^2 は

$$\begin{aligned} s_x^2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - (\bar{x})^2 \\ &= \frac{(l+1)(2l+1)}{6} - \left(\frac{l+1}{2} \right)^2 \\ &= \frac{(l+1)(l-1)}{12} \end{aligned}$$

となる。 y についても同様に考える。 $m = n$ のとき、 $y_k = R_n(k-1)+1$ である。 $0 \leq k-1 \leq n-1$

であるから、

$$\begin{aligned} y_k &= R_n(k-1)+1 \\ &= k-1+1 \\ &= k \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2} \\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k^2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

となる。以上から、 y の分散 s_y^2 は

$$\begin{aligned} s_y^2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k^2 - (\bar{y})^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 \\ &= \frac{(n+1)(n-1)}{12} \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{s-1} \left(\sum_{q=1}^l x_{pl+q} y_{pl+q} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{s-1} \left\{ \left(\sum_{q=1}^l q(p l + q) \right) \right\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{s-1} \left(p l \cdot \frac{l(l+1)}{2} + \frac{l(l+1)(2l+1)}{6} \right) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \left\{ \frac{l^2(l+1)}{2} \cdot \frac{s(s-1)}{2} + \frac{sl(l+1)(2l+1)}{6} \right\} \\ &= \frac{(l+1)l(s-1)}{4} + \frac{(l+1)(2l+1)}{6} \\ &= \frac{(n-l)(l+1)}{4} + \frac{(2l+1)(l+1)}{6} \\ &= \frac{(3n+l+2)(l+1)}{12} \end{aligned}$$

となる。共分散 s_{xy} については、(1)より、

$$\begin{aligned} s_{xy} &= \bar{z} - \bar{x} \bar{y} \\ &= \frac{(3n+l+2)(l+1)}{12} - \frac{l+1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} \\ &= \frac{(l+1)(l-1)}{12} \end{aligned}$$

となる。以上の結果を用いて、相関係数 r は、

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{\frac{(l+1)(l-1)}{12}}{\sqrt{\frac{(l+1)(l-1)}{12}} \cdot \sqrt{\frac{(n+1)(n-1)}{12}}} = \sqrt{\frac{(l+1)(l-1)}{(n+1)(n-1)}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sqrt{\frac{(l+1)(l-1)}{(n+1)(n-1)}}$$

(3)

$s = l+1$ とすれば、(2)における x_k の計算がそのまま成立するから、

$$\bar{x} = \frac{l+1}{2}$$

となる。(2)の x_k の計算において、 $l \rightarrow l+1, s \rightarrow l$ と置換して考えれば、

$$\bar{y} = \frac{l+2}{2}$$

であると分かる。ここで、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k y_k &= \sum_{q=1}^l \left(\sum_{p=0}^l x_{pl+q} y_{pl+q} \right) \\ &= \sum_{q=1}^l \left(\sum_{p=0}^l u_{pl+q} y_{pl+q} \right) \\ &= \sum_{q=1}^l \left(\sum_{p=0}^l q y_{pl+q} \right) \\ &= \sum_{q=1}^l q \left(\sum_{p=0}^l y_{pl+q} \right) \end{aligned}$$

であるが、

$$\{(p+1)l+q\} \equiv pl+q-1 \pmod{l+1}$$

であるから、 q の値に依らず、

$$y_{pl+q} = 1 \text{ のとき、 } R_{l+1}(pl+q) = 0 \text{ より } y_{(p+1)l+q} = R_{l+1}(pl+q-1) + 1 = l+1$$

$$y_{pl+q} \neq 1 \text{ のとき、 } R_{l+1}(pl+q) \neq 0 \text{ より } y_{(p+1)l+q} = R_{l+1}(pl+q-1) + 1 = y_{pl+q} - 1$$

である。これより、 y_q の値に依らず、 $y_{0l+q}, y_{1l+q}, \dots, y_{l-1l+q}$ は、 $1, 2, l+1$ を並び替えたものとな

る。よって、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k y_k &= \sum_{q=1}^l q \left(\sum_{p=0}^l y_{pl+q} \right) \\ &= \sum_{q=1}^l q \left(\sum_{v=1}^{l+1} v \right) \\ &= \sum_{q=1}^l q \cdot \frac{(l+1)(l+2)}{2} \\ &= \frac{(l+1)(l+2)}{2} \cdot \sum_{q=1}^l q \\ &= \frac{l(l+1)^2(l+2)}{4} \end{aligned}$$

であり、

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k = \frac{1}{l(l+1)} \cdot \frac{l(l+1)^2(l+2)}{4} = \frac{(l+1)(l+2)}{4}$$

となる。(1)より、

$$\begin{aligned} s_{xy} &= \bar{z} - \bar{x} \bar{y} \\ &= \frac{(l+1)(l+2)}{4} - \frac{l+1}{2} \cdot \frac{l+2}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。以上の結果を用いて、相関係数 r は、

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = 0$$

となる。

(答) 0

(1)

実数 x, y を用いて、 $z = x + yi$ と表すことができる。すると、

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} \right) \\ &= \frac{3(\bar{z} + z)}{4z\bar{z}}\end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned}\beta &= 0 \\ \Leftrightarrow z + \bar{z} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x &= 0\end{aligned}$$

である。ここで、 $z \neq 0$ より、 $y \neq 0$ である。以上より、 z は純虚数である。

(答) z は純虚数である

(2)

$$\begin{cases} \alpha = \frac{3}{4}(z + \bar{z}) = \frac{3}{4} \cdot 2x = \frac{3}{2}x \\ \beta = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} \right) = \frac{3(\bar{z} + z)}{4z\bar{z}} = \frac{3 \cdot 2x}{4(x^2 + y^2)} = \frac{3x}{2(x^2 + y^2)} \end{cases}$$

である。 β が自然数の時、 $\beta \geq 1$ である。よって、 $3x \geq 2(x^2 + y^2)$ である。これより、

$$\begin{aligned}3x &\geq 2(x^2 + y^2) \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 2y^2 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + 2y^2 &\leq \frac{9}{8} \\ \Rightarrow \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 &\leq \frac{9}{16} \\ \Leftrightarrow 0 &\leq x \leq \frac{3}{2}\end{aligned}$$

となる。 $\alpha = \frac{3}{2}x$ であり、これが自然数であるから $x = \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$ が必要である。以下、 $x = \frac{2}{3}$ のとき

と $x = \frac{4}{3}$ の場合に分けて考える。

[1] $x = \frac{2}{3}$ のとき

$$\beta = \frac{3x}{2(x^2 + y^2)} = \frac{3 \cdot \frac{2}{3}}{2\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + y^2\right\}} = \frac{1}{\frac{4}{9} + y^2}$$

である。よって、 $\beta \leq \frac{9}{4}$ となり、 $\beta = 1, 2$ となる。 $\beta = 1, 2$ のとき、それぞれ

$$\begin{aligned}y &= \pm \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \\ y &= \pm \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{4}{9}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{6}\end{aligned}$$

となる。よって、 $z = \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{5}}{3}i, \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{6}i$ である。

[2] $x = \frac{4}{3}$ のとき

$$\beta = \frac{3x}{2(x^2 + y^2)} = \frac{3 \cdot \frac{4}{3}}{2\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + y^2\right\}} = \frac{2}{\frac{16}{9} + y^2}$$

である。よって、 $\beta \leq \frac{9}{8}$ となり、 $\beta = 1$ となる。 $\beta = 1$ のとき、

$$y = \pm \sqrt{2 - \frac{16}{9}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$$

となる。よって、 $z = \frac{4}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}i$ である。

以上、[1][2]から、 $z = \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{5}}{3}i, \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{6}i, \frac{4}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}i$ となる。

(答) $z = \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{5}}{3}i, \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{6}i, \frac{4}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}i$

(3)

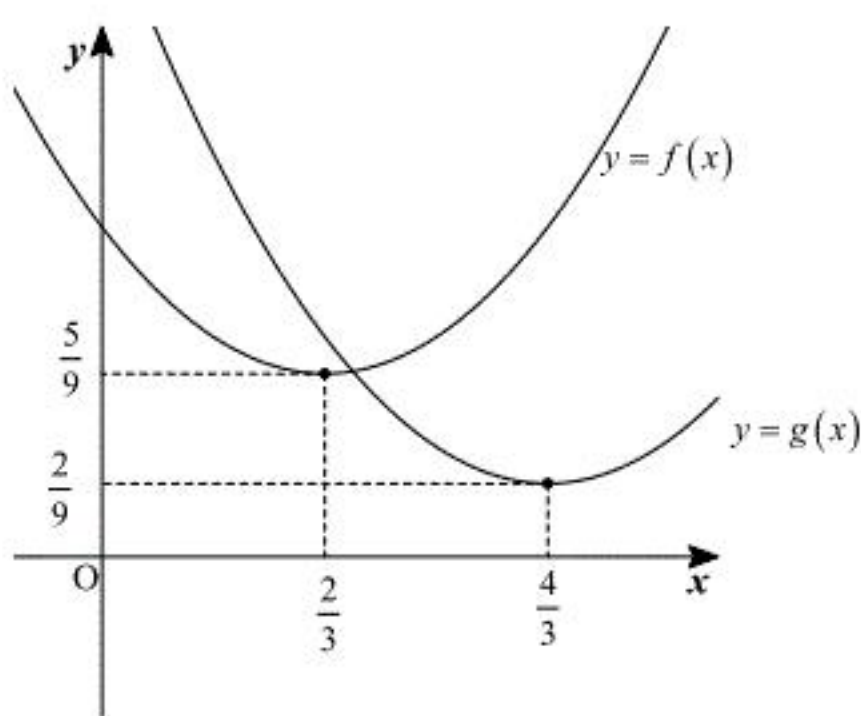
共役な2つの複素数は、複素数平面上において x 軸に対称である。(2)の解は3組の共役な複素数であるから、円 C の中心は x 軸上にある。よって、円 C の中心を $(a, 0)$ 、半径を r とすると、

$(x - a)^2 + y^2 \leq r^2$ であれば良い。ここで、 $\left(\frac{2}{3}, \pm \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ が円に含まれるならば、 $\left(\frac{2}{3}, \pm \frac{\sqrt{2}}{6}\right)$ も含

まれるので、 $\left(\frac{2}{3}, \pm \frac{\sqrt{5}}{3}\right) \left(\frac{4}{3}, \pm \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ について考える。求める条件は、

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{3} - a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 &\leq r^2 \\ \left(\frac{4}{3} - a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 &\leq r^2\end{aligned}$$

となる。よって、 $f(a) = \left(\frac{2}{3} - a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2$ 、 $g(a) = \left(\frac{4}{3} - a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2$ とすると、 $f(a), g(a)$ の小さい方の値が最小になるとき、 r は最小値を取ることができる。 $y = f(x), y = g(x)$ は以下のようなグラフになる。



上図より、 $f(a), g(a)$ の小さい方の値が最小になるのは、 $f(a) = g(a)$ の時である。よって、

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{3} - a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 &= \left(\frac{4}{3} - a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 \\ \Leftrightarrow a^2 - \frac{4}{3}a + 1 &= a^2 - \frac{8}{3}a + 2 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{3}a - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

となり、 $a = \frac{3}{4}$ のとき、 $f(a) = g(a)$ となる。また、

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{81}{144} = \frac{9}{16}$$

である。以上から、 $a = \frac{3}{4}$ のとき、つまり円 C の中心が点 $\frac{3}{4}$ であるときに、 r は最小値

$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$ をとることができる。

(答) 中心：点 $\frac{3}{4}$ ，半径： $\frac{3}{4}$

(1)

加法定理より、

$$\sin(2\theta + \theta) = \sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta$$

である。さらに 2 倍角の公式より、

$$\begin{aligned}\sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \cos \theta + (1 - 2 \sin^2 \theta) \sin \theta \\ &= 2 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) + \sin \theta - 2 \sin^3 \theta \\ &= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta\end{aligned}$$

となる。以上から、 $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$ となることが示された。

(証明終)

(2)

$$x = a \cos 2t = a(1 - 2 \sin^2 t)$$

であるから、

$$\sin t = \pm \sqrt{\frac{a-x}{2a}}$$

となるが、 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$ であるから、 $\sin t \geq 0$ である。よって、 $\sin t = \sqrt{\frac{a-x}{2a}}$ である。(1)を利用して、

$$\begin{aligned}y &= b \sin 3t \\ &= b(3 \sin t - 4 \sin^3 t) \\ &= 3b \left(\frac{a-x}{2a} \right)^{\frac{1}{2}} - 4b \left(\frac{a-x}{2a} \right)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = 3b \left(\frac{a-x}{2a} \right)^{\frac{1}{2}} - 4b \left(\frac{a-x}{2a} \right)^{\frac{3}{2}}$$

(3)

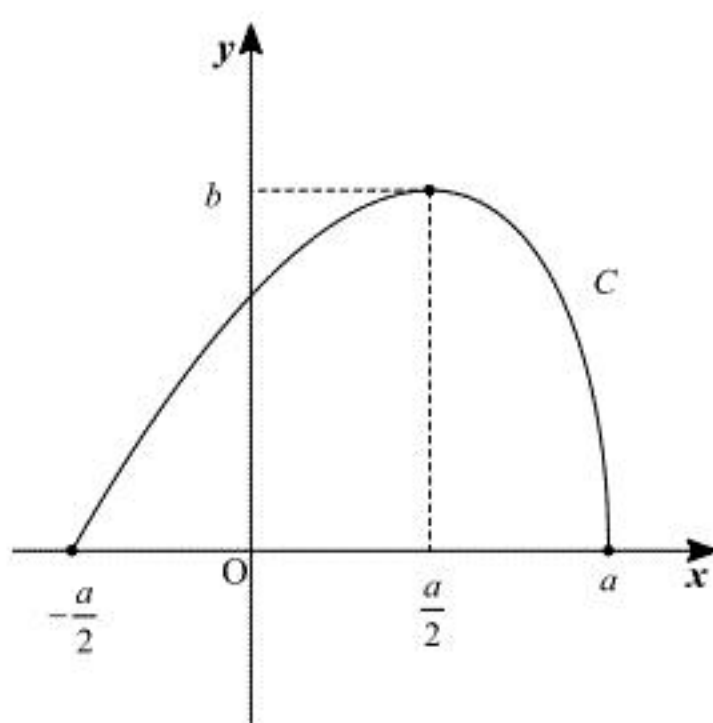
$0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$ であるから、 $-\frac{a}{2} \leq x \leq a$ である。 $-\frac{a}{2} < x < a$ において、

$$\begin{aligned}y' &= -\frac{3b}{4a} \left(\frac{a-x}{2a} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{3b}{a} \left(\frac{a-x}{2a} \right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{3b}{4a} \left(\frac{a-x}{2a} \right)^{\frac{1}{2}} \left(-1 + 4 \cdot \frac{a-x}{2a} \right) \\ &= \frac{3b}{4a^2} \left(\frac{a-x}{2a} \right)^{\frac{1}{2}} (a-2x)\end{aligned}$$

となる。よって、増減表は以下のようになる。

x	$-\frac{a}{2}$	$\dots$	$\frac{a}{2}$	$\dots$	a
y'		$+$	0	$-$	
y	0				0

この増減表をもとに曲線 C をかくと以下のようになる。



(答) 上図

(4)

上図より、求める体積 V は、

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_{-\frac{a}{2}}^a y^2 dx \\ &= \pi b^2 \int_{-\frac{a}{2}}^a \left\{ 9 \left(\frac{a-x}{2a} \right) - 24 \left(\frac{a-x}{2a} \right)^2 + 16 \left(\frac{a-x}{2a} \right)^3 \right\} dx\end{aligned}$$

となる。ここで、 $u = \frac{a-x}{2a}$ とすると、 $dx = -2a \cdot du$ 、 $x: -\frac{a}{2} \rightarrow a$ のとき $u: \frac{3}{4} \rightarrow 0$ であるから、

$$\begin{aligned}V &= -2\pi ab^2 \int_{\frac{3}{4}}^0 (9u - 24u^2 + 16u^3) du \\ &= 2\pi ab^2 \left[\frac{9}{2}u^2 - 8u^3 + 4u^4 \right]_0^{\frac{3}{4}} \\ &= 2\pi ab^2 \cdot \frac{27}{64} \\ &= \frac{27}{32} \pi ab^2\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{27}{32} \pi ab^2$$

(1)

直線 L_k が原点以外の点 (a, b) を通ると仮定する。このとき、 $b = ka$ である。ここで、 $a = 0$ のときと $a \neq 0$ のときに場合分けして考える。

[1] $a = 0$ のとき

$b = k \cdot 0 = 0$ より、点 (a, b) は原点に一致する。これは、点 (a, b) が原点以外の点であることに矛盾する。

[2] $a \neq 0$ のとき

$a \neq 0$ ならば、 $k = \frac{b}{a}$ となるが、左辺は無理数であり、右辺は無理数であるから、これも k が無理数である条件に矛盾する。

[1][2]より、直線 L_k が原点以外の点 (a, b) を通ることはない。以上から示せた。

(証明終)

(2)

以下、実数 x に対して、 x 以下の最大の整数を $[x]$ と表す。直線 L_k が $x = n-1, n$ と交わる点はそれぞれ $(n-1, k(n-1)), (n, kn)$ である。任意の自然数 n において、 kn は整数ではない。よって、 D_n に含まれ、直線 L_k が通る区画は $[k(n-1)] < y < [k(n-1)] + 1$ かつ $n-1 < x < n$ の区画から、 $[kn] < y < [kn] + 1$ かつ $n-1 < x < n$ の区画までである。以上から、

$$a_n = [kn] + 1 - [k(n-1)]$$

である。また、 $k(n-1) - 1 < [k(n-1)] \leq k(n-1)$ 、 $kn - 1 < [kn] \leq kn$ である。よって、

$$\begin{aligned} kn - 1 - k(n-1) + 1 &< a_n < kn - k(n-1) + 1 + 1 \\ \Leftrightarrow k &< a_n < k + 2 \end{aligned}$$

となり、示せた。

(証明終)

(3)

$a_n = [kn] + 1 - [k(n-1)]$ であるから、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n &= \sum_{n=1}^N \{[kn] - [k(n-1)] + 1\} \\ &= [kN] - [k \cdot 0] + N \\ &= [kN] + N \end{aligned}$$

である。ここで、

$$kN - 1 < [kN] \leq kN$$

であるから、

$$kN + N - 1 < [kN] + N \leq kN + N$$

となる。よって、

$$k + 1 - \frac{1}{N} < \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n \leq k + 1$$

である。 $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(k + 1 - \frac{1}{N} \right) = k + 1$ であるから、はさみうちの定理より、 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n = k + 1$ となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n = k + 1$$

(4)

$0 < k < 1$ から $a_n = 1, 2$ である。 $a_n \geq k + 1$ となるのは、 $a_n = 2$ のときである。また、 $a_n = 2$ となるのは、ある整数 c がただ1つ存在して、 $n-1 < x < n$ において直線 L_k が $y = c$ と交わるときである。直線 L_k と直線 $x = N$ の交点は (N, kN) であるから、直線 L_k は $0 < x < N$ で $y = 1, 2, \dots, [kN] - 1, [kN]$ と一度ずつ交わる。よって、各 n に対して上記を満たすような c は高々1つしか存在しないことも考えれば、 $A_n = [kN]$ となる。ここで、

$$kN - 1 < [kN] \leq kN$$

であるから、

$$k - \frac{1}{N} < \frac{[kN]}{N} \leq k$$

となる。 $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(k - \frac{1}{N} \right) = k$ であるから、はさみうちの定理より、 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A_N}{N} = k$ となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A_N}{N} = k$$