

1

(1)

正二十面体の1つの面には3つの辺が存在し、1つの辺には2つの面が接することから、 X の辺の数は、

$$3 \times 20 \div 2 = 30$$

である。また、正二十面体では1つの頂点に5つの面が集まり、1つの円には3つの頂点が存在することから、 X の頂点の数は、

$$3 \times 20 \div 5 = 12$$

である。1つの辺には、両端に1つずつの頂点が存在することより、 X の頂点に集まる辺の数は、

$$\frac{30 \times 2}{12} = 5$$

である。

	辺の数	30
(答)	頂点の数	12
	頂点に集まる点の数	5

(2)

直線 OA , OB がなす平面を π とすれば、点 C , D はそれぞれ直線 OA , OB 上の点であるから、点 A , B , C , D は全て π 上に存在する。また、 X が Q に内接していることから、 Q の半径を r とすれば、

$$AO = BO = CO = DO = r$$

である。よって、四角形 $ABCD$ は平行四辺形であり、

$$AC = 2 \cdot OA = 2 \cdot OB = BD$$

より、四角形 $ABCD$ が長方形であることが示された。

(証明終)

(3)

正二十面体の形を考えれば、点 A , D を底面の頂点に持ち、全ての辺の長さが2であるような正五角形が存在することが分かる。よって、線分 AD の長さは、一辺の長さが2である正五角形の対角線の長さに等しい。五角形の頂点の角の大きさは 108° であるから、余弦定理より、

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cos 108^\circ} \\ &= \sqrt{8(1 + \sin 18^\circ)} \end{aligned}$$

が得られる。 $\theta = 18^\circ$ とおくと、

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - 3\theta \right) \\ &= \sin 2\theta \end{aligned}$$

であるから、 $\cos \theta \neq 0$, $\sin \theta > 0$ に注意すれば、

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \sin 2\theta \\ \Leftrightarrow 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ \Leftrightarrow 4 \cos^2 \theta - 3 &= 2 \sin \theta \\ \Leftrightarrow 4 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin \theta &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{8 - 2 + 2\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} \\ &= 1 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

となる。

(答) $1 + \sqrt{5}$

(4)

三平方の定理より、

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2} \sqrt{AD^2 + CD^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \sqrt{5})^2 + 2^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

である。よって解は、

$$4\pi r^2 = (10 + 2\sqrt{5})\pi$$

となる。

(5)

解を V とおく。1つの面を選び、点 O とその面から成る正三角錐の体積を V' とおくと、 $V = 20V'$ である。点 O からその正三角形へ下ろした垂線の足を点 J とし、その正三角形の頂点の1つを E とおく。このとき、点 J は正三角形の重心であり、

$$\begin{aligned} EJ &= \frac{2}{3} \cdot 2 \sin 60^\circ \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} OJ &= \sqrt{OE^2 - EJ^2} \\ &= \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{4} - \frac{4}{3}} \\ &= \sqrt{\frac{14 + 2\sqrt{45}}{12}} \\ &= \frac{\sqrt{5} + 3}{\sqrt{12}} \\ &= \frac{3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} V' &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \right) \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{3 + \sqrt{5}}{6} \end{aligned}$$

である。以上より、

$$\begin{aligned} V &= 20V' \\ &= 10 + \frac{10}{3}\sqrt{5} \end{aligned}$$

である。

(答) $10 + \frac{10}{3}\sqrt{5}$

(6)

半直線 EJ と、向かい合う辺の交点を F とおくと、

$$\angle HOK = 2\angle JOF$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} JF &= \frac{1}{3} EF \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \cos \angle JOF &= \frac{OJ}{OF} \\ &= \frac{OJ}{\sqrt{JF^2 + OJ^2}} \\ &= \frac{\frac{3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{14 + 6\sqrt{5}}{12}}} \\ &= \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{18 + 2\sqrt{45}}} \\ &= \frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{15}} \\ &= \frac{3\sqrt{15} + 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - \sqrt{15}}{12} \\ &= \frac{1}{6} (\sqrt{15} + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \cos \angle HOK &= 2 \cos^2 \angle JOF - 1 \\ &= \frac{\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

である。以上より、

$$\begin{aligned} \overline{OH} \cdot \overline{OK} &= OJ^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \\ &= \frac{14 + 6\sqrt{5}}{12} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \\ &= \frac{30 + 14\sqrt{5}}{36} \\ &= \frac{7\sqrt{5} + 15}{18} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{7\sqrt{5} + 15}{18}$

2

(1)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= e^{-\sqrt{x}} - \frac{x}{2\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} \\
 &= \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right) e^{-\sqrt{x}} \\
 f''(x) &= -\frac{1}{4\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} + \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right) \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) e^{-\sqrt{x}} \\
 &= -\frac{1}{4\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} + \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4}\right) e^{-\sqrt{x}} \\
 &= \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4\sqrt{x}}\right) e^{-\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

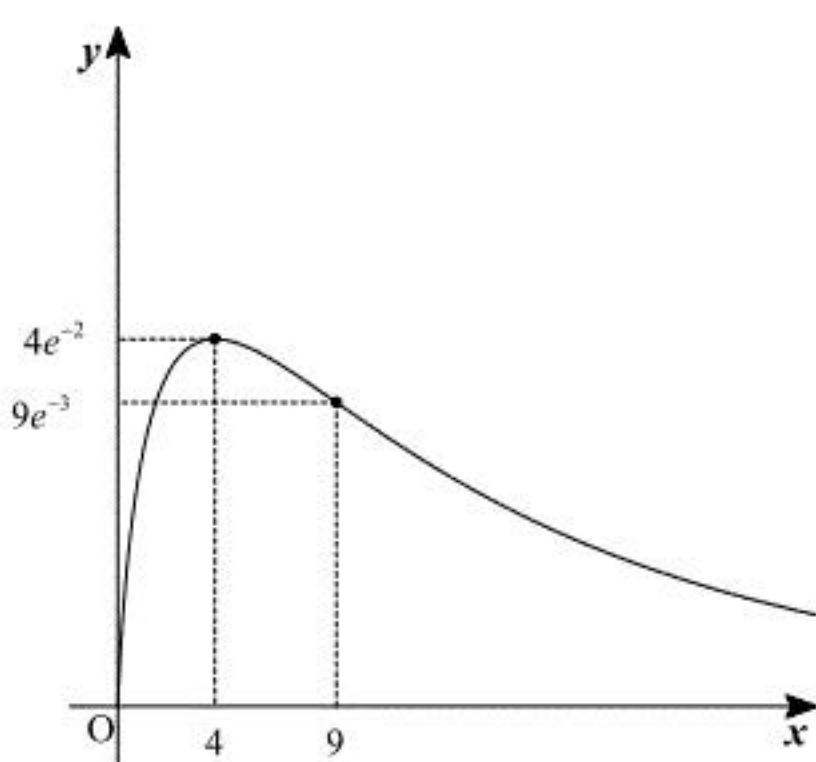
より、 $f(x)$ の増減、凹凸は以下の通りである。

x	0	...	4	...	9	...
$f'(x)$		+	0	-	-	-
$f''(x)$		-	-	-	0	+
$f(x)$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	$9e^{-3}$	$\searrow$

また、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

であるから、 $f(x)$ のグラフの概形は以下の通りである。



(答) 前表・前図

(2)

$$\begin{aligned}
 xe^{-\sqrt{x}} &= \frac{x}{e^2} \\
 \Leftrightarrow x \left(e^{-\sqrt{x}} - \frac{1}{e^2} \right) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x &= 0, 4
 \end{aligned}$$

より、曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = \frac{x}{e^2}$ の交点の x 座標は $x = 0, 4$ である。 $0 < x < 4$ では $f(x) > \frac{x}{e^2}$

であるから、解を S とおくと、

$$S = \int_0^4 \left(xe^{-\sqrt{x}} - \frac{x}{e^2} \right) dx$$

である。 $-\sqrt{x} = t$ とおくと、 $-\frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt$ であり、積分範囲は以下のように対応する。

x	4	$\rightarrow$	0
t	-2	$\rightarrow$	0

したがって、

$$\begin{aligned}
 \int_0^4 xe^{-\sqrt{x}} dx &= \int_0^{-2} 2t^3 e^t dt \\
 &= \int_0^{-2} 2t^3 e^t dt \\
 &= \left[e^t (2t^3 - 6t^2 + 12t - 12) \right]_0^{-2} \\
 &= e^{-2} (-16 - 24 - 24 - 12) - e^0 (-12) \\
 &= -76e^{-2} + 12
 \end{aligned}$$

が得られる。また、

$$\begin{aligned}
 \int_0^4 -\frac{x}{e^2} dx &= \left[-\frac{x^2}{2e^2} \right]_0^4 \\
 &= -8e^{-2}
 \end{aligned}$$

となる。よって、

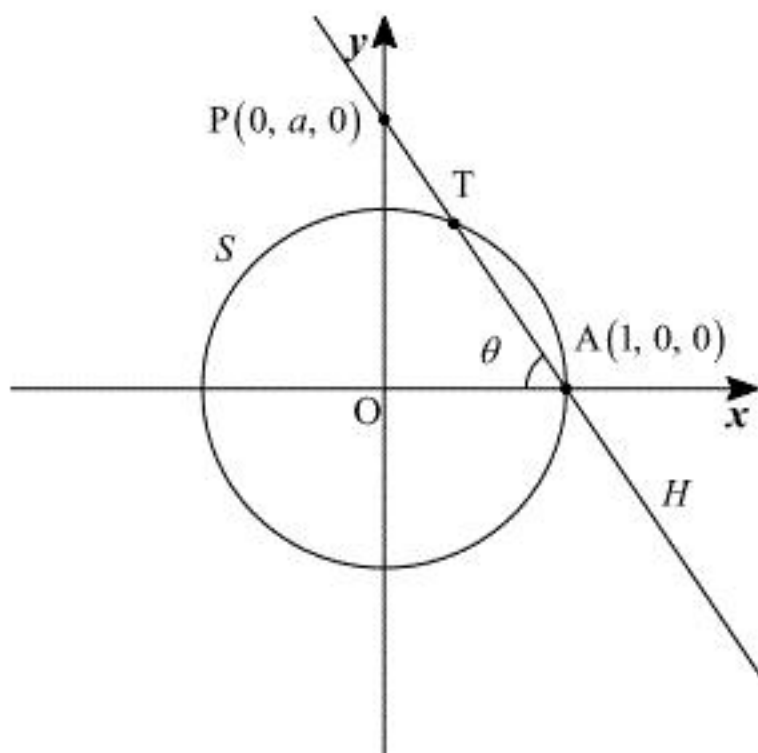
$$\begin{aligned}
 S &= -76e^{-2} + 12 - 8e^{-2} \\
 &= -84e^{-2} + 12
 \end{aligned}$$

である。

(答) $-84e^{-2} + 12$

3

(1)



上図より,

$$\begin{aligned}\tan(\pi - \theta) &= \frac{0 - a}{1 - 0} \\ \Leftrightarrow \tan \theta &= a\end{aligned}$$

である。

(答) $a = \tan \theta$

(2)

直線 PA の式は $y = -a(x - 1)$ であるから, T の座標を $T(\cos \psi, \sin \psi, 0)$ とおくと,
 $\sin^2 \psi + \cos^2 \psi = 1$, $\cos \psi < 1$ に注意すれば, $\sin \psi = -a(\cos \psi - 1)$ を $\sin^2 \psi + \cos^2 \psi = 1$ に代入して,

$$\begin{aligned}\sin^2 \psi + \cos^2 \psi &= 1 \\ \Leftrightarrow \{-a(\cos \psi - 1)\}^2 + \cos^2 \psi &= 1 \\ \Leftrightarrow (a^2 + 1)\cos^2 \psi - 2a^2 \cos \psi + (a^2 + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos \psi = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}, \sin \psi = \frac{2a}{a^2 + 1} \\ \Leftrightarrow \cos \psi = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta, \sin \psi = 2 \sin \theta \cos \theta \\ \Leftrightarrow \cos \psi = -\cos 2\theta, \sin \psi = \sin 2\theta\end{aligned}$$

となる。また, C の中心は点 A, P の中点であるから, その座標は

$$\left(\frac{1}{2}(1 + \cos \psi), \frac{1}{2}(0 + \sin \psi), \frac{1}{2}(0 + 0)\right) = \left(\sin^2 \theta, \frac{1}{2} \sin 2\theta, 0\right)$$

である。

(答) $\left(\sin^2 \theta, \frac{1}{2} \sin 2\theta, 0\right)$

(3)

$\cos \theta > 0$ であることに注意すれば, C の半径は,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}AT &= \sqrt{\left(1 - \sin^2 \theta\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta\right)^2} \\ &= \sqrt{\cos^2 \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} \\ &= \sqrt{\cos^2 \theta} \\ &= \cos \theta\end{aligned}$$

となる。また, 原点から線分 AT に下ろした垂線の足が点 A, T の中点であることより,

$\sin \theta > 0$ に注意すれば, その垂線の長さは,

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\sin^2 \theta\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta\right)^2} &= \sqrt{\sin^2 \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} \\ &= \sin \theta\end{aligned}$$

である。よって,

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cos^2 \theta \cdot \sin \theta \\ &= \frac{\pi}{3} (1 - \sin^2 \theta) \sin \theta \\ &= \frac{\pi}{3} \left\{ -\left(\sin \theta - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(\sin \theta + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2\sqrt{3}}{9} \right\}\end{aligned}$$

が得られる。 $0 < \sin \theta < 1$ で $-\left(\sin \theta - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(\sin \theta + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \leq 0$ であり,

$$-\left(\sin \theta - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(\sin \theta + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

であるから, V が最大値を取るのは $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のときで, このとき

$$\begin{aligned}V &= \frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}\pi}{27}\end{aligned}$$

となる。また, このとき

$$\begin{aligned}a &= \tan \theta \\ &= \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

である。

(答) V の最大値 $\frac{2\sqrt{3}\pi}{27}$
 a の値 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4

(1)

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \\ a_2 &= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \\ &= 1 \\ a_3 &= 4 \cdot 1 \cdot (1-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。また、与えられた漸化式より

$$a_n = 0 \Rightarrow a_{n+1} = 0$$

が成立するから、帰納的に、 $n = 4, 5, 6, \dots$ では $a_n = 0$ である。

$$(\text{答}) \quad a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & (n=1) \\ 1 & (n=2) \\ 0 & (n>2) \end{cases}$$

(2)

$$a_{n+1} = -4\left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$$

となるから、 $f(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1$ とおくと、 $0 \leq x \leq 1$ での $f(x)$ の最大値は $x = \frac{1}{2}$ のとき 1 で

あり、最小値は $x = 0, 1$ のとき 0 である。よって、

$$0 \leq a_n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq a_{n+1} \leq 1$$

が成立する。 $0 \leq a_1 \leq 1$ であるから、帰納的に、任意の自然数 n について $0 \leq a_n \leq 1$ である。

(証明終)

(3)

$$\begin{aligned} a_{k+1} - 3a_k &= -4a_k^2 + a_k \\ &= -4a_k\left(a_k - \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

である。これは、 $0 < a_k < \frac{1}{4}$ のとき正となる。よって、 $0 < a_k < \frac{1}{4}$ のとき、

$$\begin{aligned} a_{k+1} - 3a_k &> 0 \\ \Leftrightarrow a_{k+1} &> 3a_k \end{aligned}$$

である。

(証明終)

(4)

$$[1] \quad \frac{3}{4} < a < 1 \text{ のとき}$$

$m = 1$ で成立する。

$$[2] \quad \frac{1}{4} \leq a \leq \frac{3}{4} \text{ のとき}$$

$\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ のもと $f(x)$ の最大値は $x = \frac{1}{2}$ で 1、最小値は $x = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ で $\frac{3}{4}$ であるから、 $m = 2$

で成立する。

$$[3] \quad 0 < a < \frac{1}{4} \text{ のとき}$$

(3)より、 $a_k < \frac{1}{4}$ である限り $a_{k+1} > 3a_k$ が成立するから、 $a_n \geq \frac{1}{4}$ なる n が存在しないと仮定

すれば、 $a_n > 3^{n-1}a$ であり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^{n-1}a = \infty$ であるから、矛盾する。よって、 $a_n \geq \frac{1}{4}$ なる n が

必ず存在する。また、 $a_{n+1} = 1 \Leftrightarrow a_n = \frac{1}{2}$ であるから、 $a_n < 1$ である。よって、このような a_n

を新たに a と見なして考えれば、[1], [2]より、この数列には $\frac{3}{4}$ 以上となる項が存在する。

よって、この場合も成立する。

以上[1], [2], [3]より、任意の a に対して、条件を満たすような m は存在する。

(証明終)

(5)

対偶「任意の自然数 n について $a_n \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ではない」を示す。任意の自然数 n につい

て $a_n \neq 0$ であるとき、 a_n を新たに a と見なして考えれば、(4)より、 $m \geq n$ なる自然数 m で a_m

$\geq \frac{3}{4}$ となるものが存在する。則ち、任意の自然数 n について、ある自然数 m が存在し、 $m \geq n$

であり、 $a_m \geq \frac{3}{4}$ である。よって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ではない。

(証明終)