

1

(1)

$f(x) = e^x - (ax + b)$ とおく。このとき、
 L が D に含まれる $\Leftrightarrow$ 全ての実数 x に対して $f(x) \geq 0$ である
 が成り立つ。

$$f'(x) = e^x - a$$

であるから、 a の値で場合分けを行う。

[1] $a > 0$ のとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow e^x - a &= 0 \\ \therefore x &= \log a \end{aligned}$$

となるから、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$\log a$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$f(\log a) = a - a \log a - b$ より、求める条件は

$$\begin{aligned} a - a \log a - b &\geq 0 \\ \therefore b &\leq a - a \log a \end{aligned}$$

である。ここで $g(a) = a - a \log a$ とすると、 $g'(a) = -\log a$ となるので、 $a > 0$ における $g(a)$ の増減表は次のようになる。

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(a)$	$\searrow$	$+$	0	$-$
$g(a)$	$\searrow$	$\nearrow$	極大	$\searrow$

また、 $g''(a) = -\frac{1}{a} < 0$ ($\because a > 0$) であるから、 $g(a)$ は上に凸である。そして $\lim_{a \rightarrow +0} a \log a = 0$

より、 $\lim_{a \rightarrow +0} g(a) = 0$ 、 $\lim_{a \rightarrow +\infty} g(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} a(1 - \log a) = -\infty$ である。

[2] $a = 0$ のとき

$f'(x) = e^x > 0$ より、 $f(x)$ は単調増加であり、

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -b$$

であるから、求める条件は、

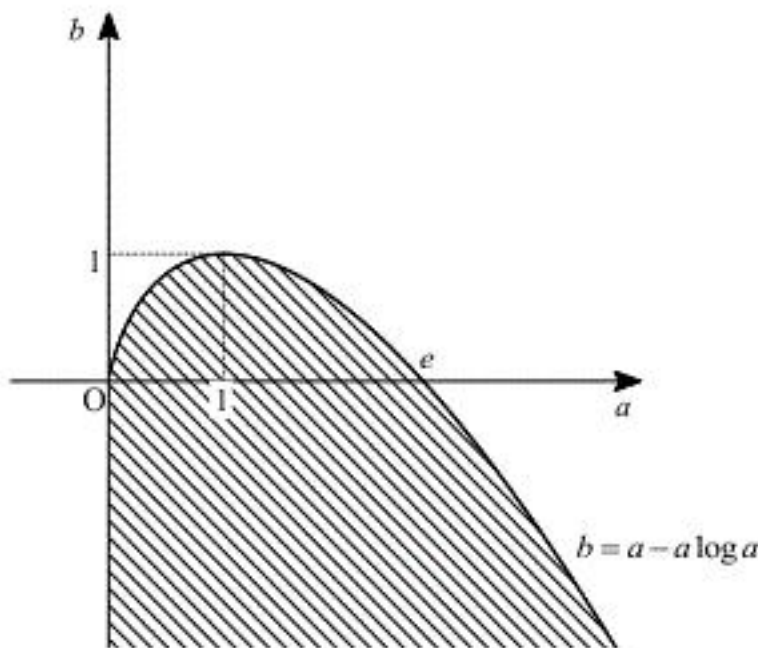
$$\begin{aligned} -b &\geq 0 \\ \therefore b &\leq 0 \end{aligned}$$

である。

[3] $a < 0$ のとき

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ となり、 $f(x) < 0$ となる実数 x が存在することから、条件を満たさない。

以上[1]. [2]. [3]より、条件を満たす集合 E は下図の斜線部のようにになる。ただし境界線を含む。



(答) 前図

(2)

$t \rightarrow +0$ の極限を考えるので、 $0 < t < e$ の範囲で考えればよい。このとき、(1)の結果より

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_t^e (a - a \log a) da \\ &= \left[\frac{1}{2} a^2 \right]_t^e - \left(\left[\frac{1}{2} a^2 \log a \right]_t^e - \int_t^e \frac{1}{2} a da \right) \\ &= \left[\frac{1}{2} a^2 \right]_t^e - \left[\frac{1}{2} a^2 \log a \right]_t^e + \left[\frac{1}{4} a^2 \right]_t^e \\ &= \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{2} t^2 \log t - \frac{3}{4} t^2 \end{aligned}$$

となるので、 $\lim_{t \rightarrow +0} t \log t = 0$ より

$$\lim_{t \rightarrow +0} S(t) = \frac{e^2}{4}$$

が得られる。

(答) $\lim_{t \rightarrow +0} S(t) = \frac{e^2}{4}$

(1)

整数 p を 5 で割った余りを s とおくと、その商を p' として $p = 5p' + s$ と表すことができる。

のとき、 $p' = \left\lceil \frac{p}{5} \right\rceil$ であることに注意する。

[1] $s = 0$ のとき

点 $(p, 0)$ に最小の試行回数で到達するためには、5 の目が p' 回出ればよいから、

$$N(p, 0) = p' = \left\lceil \frac{p}{5} \right\rceil$$

となる。

[2] $s = 1$ のとき

点 $(p, 0)$ に最小の試行回数で到達するためには、5 の目が p' 回、1 の目が 1 回出ればよいから、

$$N(p, 0) = p' + 1 = \left\lceil \frac{p}{5} \right\rceil + 1$$

となる。

[3] $s = 2$ のとき

点 $(p, 0)$ に最小の試行回数で到達するためには、5 の目が p' 回、1 の目が 2 回出ればよいから、

$$N(p, 0) = p' + 2 = \left\lceil \frac{p}{5} \right\rceil + 2$$

となる。

[4] $s = 3$ のとき

点 $(p, 0)$ に最小の試行回数で到達するためには、5 の目が p' 回、3 の目が 1 回出ればよいから、

$$N(p, 0) = p' + 1 = \left\lceil \frac{p}{5} \right\rceil + 1$$

となる。

[5] $s = 4$ のとき

点 $(p, 0)$ に最小の試行回数で到達するためには、5 の目が p' 回、3 の目が 1 回、1 の目が 1 回出ればよいから、

$$N(p, 0) = p' + 1 + 1 = \left\lceil \frac{p}{5} \right\rceil + 2$$

となる。

以上[1], [2], [3], [4], [5]より、

$$\left\lceil \frac{p}{5} \right\rceil \leq N(p, 0) \leq \left\lceil \frac{p}{5} \right\rceil + 2$$

は示された。

続いて、整数 q を 3 で割った余りを t とおくと、その商を q' として $q = 3q' + t$ と表すことがで

きる。このとき、 $q' = \left\lceil \frac{q}{3} \right\rceil$ であることに注意する。

[6] $t = 0$ のとき

点 $(0, q)$ に最小の試行回数で到達するためには、6 の目が q' 回出ればよいから、

$$N(0, q) = q' = \left\lceil \frac{q}{3} \right\rceil$$

となる。

[7] $t = 1$ のとき

点 $(0, q)$ に最小の試行回数で到達するためには、6 の目が q' 回、2 の目が 1 回出ればよいから、

$$N(0, q) = q' + 1 = \left\lceil \frac{q}{3} \right\rceil + 1$$

となる。

[8] $t = 2$ のとき

点 $(0, q)$ に最小の試行回数で到達するためには、6 の目が q' 回、4 の目が 1 回出ればよいから、

$$N(0, q) = q' + 1 = \left\lceil \frac{q}{3} \right\rceil + 1$$

となる。

以上[6], [7], [8]より、

$$\left\lceil \frac{q}{3} \right\rceil \leq N(0, q) \leq \left\lceil \frac{q}{3} \right\rceil + 1$$

は示された。

(証明終)

(2)

(1)の結果より、

$$\left\lceil \frac{an}{5} \right\rceil \leq N(an, 0) \leq \left\lceil \frac{an}{5} \right\rceil + 2$$

$$\left\lceil \frac{bn}{3} \right\rceil \leq N(0, bn) \leq \left\lceil \frac{bn}{3} \right\rceil + 1$$

となる。駒の位置を表す x 座標、 y 座標のうち、1 回の操作で増加するのはどちらか一方のみであるから、 $N(an, 0) + N(0, bn) = N(an, bn)$ である。よって、上 2 不等式の辺々の和をとると、

$$\left\lceil \frac{an}{5} \right\rceil + \left\lceil \frac{bn}{3} \right\rceil \leq N(an, bn) \leq \left\lceil \frac{an}{5} \right\rceil + \left\lceil \frac{bn}{3} \right\rceil + 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が得られる。ここで、 $x - 1 < [x] \leq x$ を用いると、①は、

$$\frac{an}{5} + \frac{bn}{3} - 2 < N(an, bn) \leq \frac{an}{5} + \frac{bn}{3} + 3$$

となる。また、 a, b はともに 0 以上の整数であり、 a, b の少なくとも一方は 0 でないことから、 $a + b > 0$ である。さらに $n > 0$ であるから、各辺を $(a + b)n$ で割ると、

$$\begin{aligned} \frac{an}{5} + \frac{bn}{3} - 2 < N(an, bn) &\leq \frac{an}{5} + \frac{bn}{3} + 3 \\ \Leftrightarrow \frac{a}{5(a+b)} + \frac{b}{3(a+b)} - \frac{2}{(a+b)n} < \frac{N(an, bn)}{(a+b)n} &\leq \frac{a}{5(a+b)} + \frac{b}{3(a+b)} + \frac{3}{(a+b)n} \\ \Leftrightarrow \frac{3a+5b}{15(a+b)} - \frac{2}{(a+b)n} < \frac{N(an, bn)}{(a+b)n} &\leq \frac{3a+5b}{15(a+b)} + \frac{3}{(a+b)n} \end{aligned}$$

が得られ、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3a+5b}{15(a+b)} - \frac{2}{(a+b)n} \right) &= \frac{3a+5b}{15(a+b)} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3a+5b}{15(a+b)} + \frac{3}{(a+b)n} \right) &= \frac{3a+5b}{15(a+b)} \end{aligned}$$

であるから、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(an, bn)}{(a+b)n} = \frac{3a+5b}{15(a+b)}$$

となる。

$$(\text{答}) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(an, bn)}{(a+b)n} = \frac{3a+5b}{15(a+b)}$$

(3)

[9] $a \neq 0$ のとき、

(2)より、

$$R(a, b) = \frac{3a+5b}{15(a+b)} = \frac{3+5 \cdot \frac{b}{a}}{15 \left(1 + \frac{b}{a} \right)}$$

となるから、 $\frac{b}{a} = x$ とおくと、

$$R(a, b) = \frac{3+5x}{15(1+x)}$$

である。 $x = \frac{b}{a} \geq 0$ ($\because a > 0, b \geq 0$) において、 $f(x) = \frac{3+5x}{15(1+x)}$ とおくと、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{5(1+x) - (3+5x)}{15(1+x)^2} \\ &= \frac{2}{15(1+x)^2} \end{aligned}$$

となるので、 $f(x)$ は $x \geq 0$ において単調増加関数であり、 $x = 0$ で最小値 $\frac{1}{5}$ をとる。この

とき、 $\frac{b}{a} = 0 \Leftrightarrow b = 0$ である。また、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{3}$ であるから、 $\frac{1}{5} \leq f(x) < \frac{1}{3}$ となる。

[10] $a = 0$ のとき、

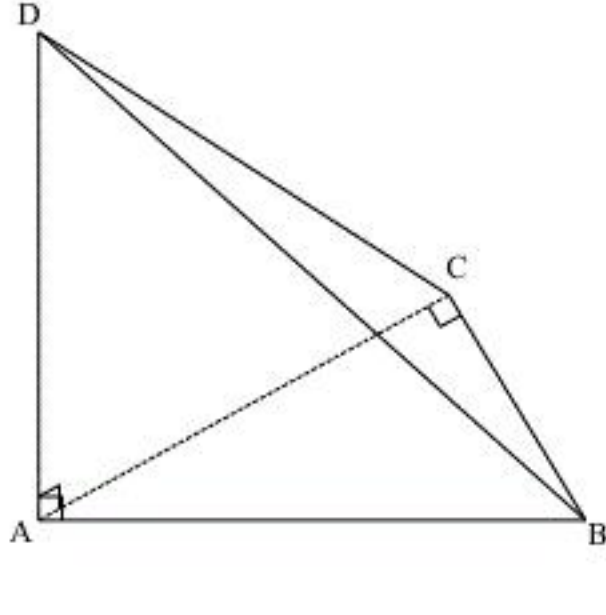
$$R(a, b) = \frac{5b}{15b} = \frac{1}{3} \text{ である。}$$

以上[9], [10]より、 $R(a, b)$ は $a = 0$ で最大値 $\frac{1}{3}$ をとり、 $b = 0$ で最小値 $\frac{1}{5}$ をとる。

$$(\text{答}) \text{ 最大値 } \frac{1}{3}, \text{ 最小値 } \frac{1}{5}$$

3

(1)



立体の概形は上図のようになる。三平方の定理より、

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

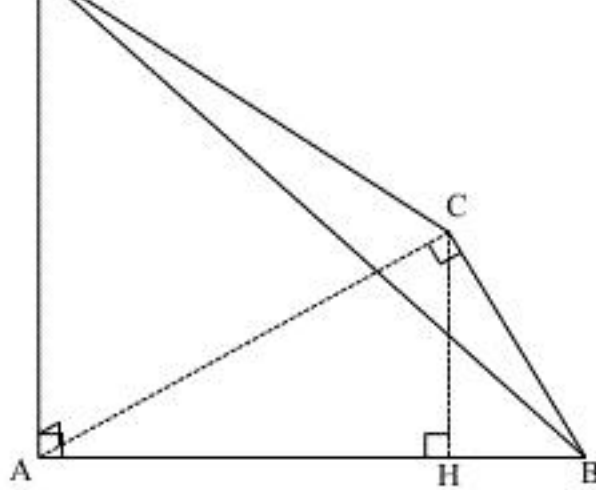
であるから、

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

となる。

(答) $\sqrt{2}$

(2)



点Cから辺ABに下ろした垂線の足をHとする。

$$\cos \angle BAC = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

より、 $\angle BAC = 30^\circ$ であるから、

$$CH = AC \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

となる。

(答) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

(3)

$CH \perp AB$, $AD \perp$ 平面 ABC であるから、 $CH \perp$ 平面 ABD であると分かる。したがって、平行光線による影は $\triangle ABD$ と合同であるから、

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD = \frac{1}{2}$$

である。

(答) $\frac{1}{2}$

(4)

直線ABを含み、平面 α に平行な平面を β とし、面ABDと β のなす角を $\theta (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ とする。

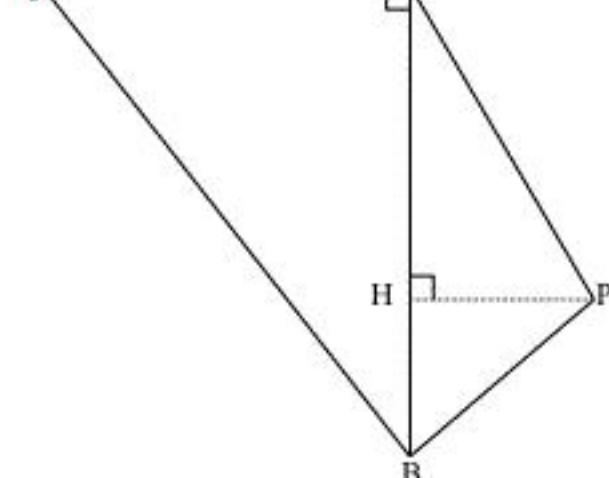
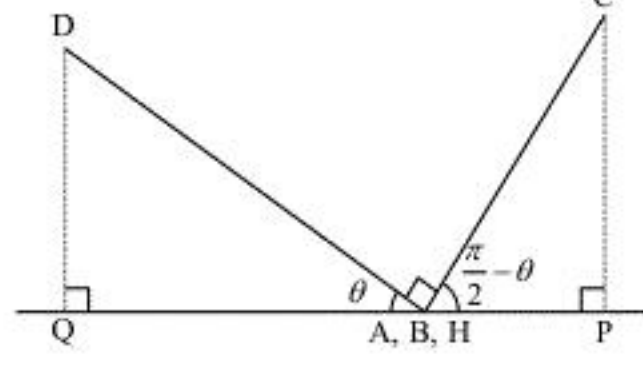
点C, Dから β に下ろした垂線の足をそれぞれP, Qとすると、

$$QA = DA \cos \theta = \cos \theta$$

$$PH = CH \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \theta$$

である。以後、点C, Dと平面 β の位置関係によって場合分けを行う。

[1] C, Dが平面 β に対して同じ側にあるとき



図より、

$$S = \triangle QAB + \triangle PAB$$

$$= \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{8} \sin \theta$$

$$= \frac{\sqrt{19}}{8} \sin(\theta + \varphi)$$

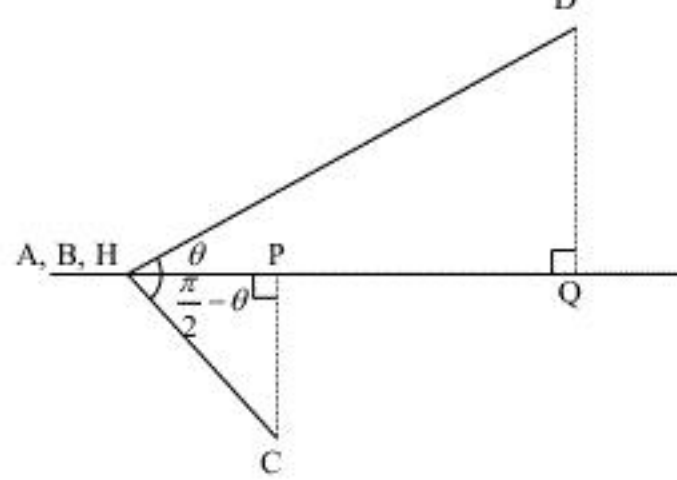
となる。ここで φ は、 $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$, $\sin \varphi = \frac{4}{\sqrt{19}}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ を満たすとする。 $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より、 $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ であることに注意すると、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \varphi \leq \theta + \varphi \leq \frac{\pi}{2} + \varphi$ において、

$$\frac{\sqrt{19}}{8} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \leq S \leq \frac{\sqrt{19}}{8} \cdot 1$$

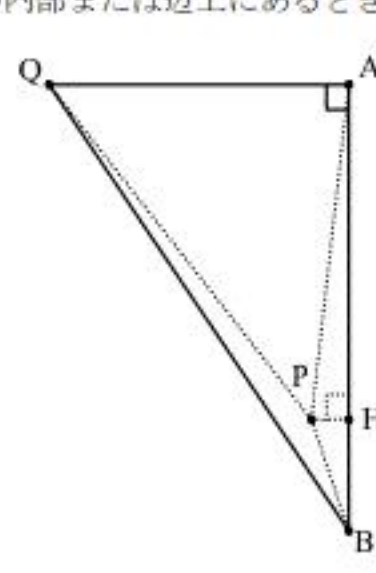
$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{8} \leq S \leq \frac{\sqrt{19}}{8}$$

である。

[2] C, Dが平面 β に対して異なる側にあるとき



[i] Pが $\triangle QAB$ の内部または辺上にあるとき、



(2)より、三平方の定理から

$$BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3}{16}} = \frac{1}{4}$$

であり、 $BH:BA = 1:4$ に注意すると[i]のとき

$$PH \leq \frac{1}{4} QA$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \theta \leq \frac{1}{4} \cos \theta$$

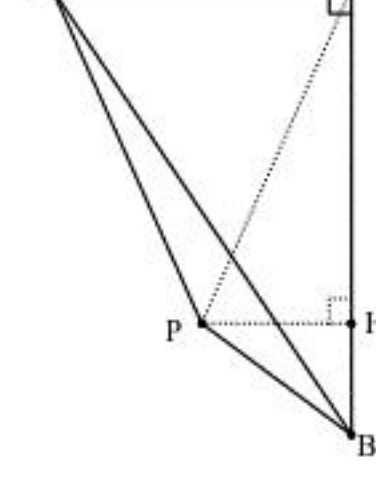
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) \leq 0$$

であり、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ と合わせると $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ である。このとき

$$S = \triangle QAB = \frac{1}{2} \cos \theta$$

であるから、 $\frac{\sqrt{3}}{4} \leq S \leq \frac{1}{2}$ となる。

[ii] Pが $\triangle QAB$ の外部または辺上にあるとき、



[ii]となるのは $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のときである。このとき、

$$S = \triangle QAP + \triangle PAB$$

$$= \frac{3}{8} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{8} \sin \theta$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)$$

であり、 $\frac{\pi}{2} \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5}{6}\pi$ より $\frac{\sqrt{3}}{8} \leq S \leq \frac{\sqrt{3}}{4}$ となる。

以上[i], [ii]より、[2]におけるSの最大値は $\frac{1}{2}$ 、最小値は $\frac{\sqrt{3}}{8}$ となる。

以上[1], [2]より、Sの最大値は $\frac{\sqrt{19}}{8}$ 、最小値は $\frac{\sqrt{3}}{8}$ となる。

(答) 最大値 $\frac{\sqrt{19}}{8}$ 、最小値 $\frac{\sqrt{3}}{8}$

(1)

実数 a を用いると、 n が偶数であることと合わせて、

$$\begin{aligned} f_n(n-1-a) &= (n-1-a)(n-2-a)\cdots(1-a)(-a) \\ &= (-1)^n a(a-1)\cdots(a-n+2)(a-n+1) \\ &= f_n(a) \end{aligned}$$

となるから、関数 $y = f_n(x)$ のグラフは、直線 $x = \frac{n-1}{2}$ に対して対称であることが示された。

(証明終)

(2)

$f_n(x)$ の各因子 $x, x-1, \dots, x-n+1$ は $n-1 < x$ において正で単調増加であるから、 $n-1 < x$ において $f_n(x)$ も単調増加する。ここで、 $x = n$ は方程式 $f_n(x) = n!$ の解であるから、 $n-1 < x$ において方程式 $f_n(x) = n!$ は実数解をただ1つ持つ。また、(1)で示したグラフの対称性より、 $x < (n-1) - (n-1) \Leftrightarrow x < 0$ においても方程式 $f_n(x) = n!$ は実数解をただ1つ持ち、それは $x = (n-1) - n = -1$ である。ここで、 $0 \leq x \leq n-1$ において、整数 $k (k=0, 1, \dots, n-1)$ に対して $k \leq x < k+1$ であるとき、

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= x(x-1)\cdots(x-k)(k+1-x)\cdots(n-1-x) \\ &\leq (k+1)k\cdots 1\cdots(n-k-1) \\ &\leq (k+1)! \times 1 \cdot (k+2)\cdots(n-1) \\ &= (n-1)! \\ &< n! \end{aligned}$$

となるので、 $0 \leq x \leq n-1$ において、 $f_n(x) = n!$ は実数解を持たない。以上より、方程式 $f_n(x) = n!$ は実数解 $x = -1, n$ を持ち、それ以外に実数解をもたない。

(答) $x = -1, n$

(3)

(2)より、 $\alpha = -1, \beta = n$ であるから、

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} |f_n(x)| dx &= \int_{-1}^n |f_n(x)| dx \\ &= \int_{-1}^0 |f_n(x)| dx + \int_0^{n-1} |f_n(x)| dx + \int_{n-1}^n |f_n(x)| dx \\ &\leq \int_{-1}^0 n! dx + \int_0^{n-1} (n-1)! dx + \int_{n-1}^n n! dx \\ &= n! + (n-1) \cdot (n-1)! + n! \\ &\leq 3n! \end{aligned}$$

が得られる。したがって、

$$0 \leq \frac{1}{(n+1)!} \int_{\alpha}^{\beta} |f_n(x)| dx \leq \frac{3n!}{(n+1)!} = \frac{3}{n+1}$$

となり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0$$

であるから、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)!} \int_{\alpha}^{\beta} |f_n(x)| dx = 0$$

である。

$$(答) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)!} \int_{\alpha}^{\beta} |f_n(x)| dx = 0$$