前期日程試験

平成30年度医学科入学試験問題

数　　学

〔注意事項〕

1　監督者の指示があるまで，この冊子を開いてはいけない。

2　**解答用紙に受験番号と氏名を必ず記入すること。**

3　この問題冊子の本文は，4ページからなっている。落丁，乱丁及び印刷不鮮明な箇所等があれば，手をあげて監督者に知らせなさい。

4　この問題冊子の計算用紙と余白は，適宜下書きに使用してもよい。

5　解答は，すべて別紙「解答用紙」の指定された場所に記入すること。

6　この問題冊子は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ a, b は実数とする。xy 平面上で不等式 $y \leqq e^x$ をみたす点 $(x,\ y)$ の集合を D とし，直線 $y = ax + b$ を L とする。

(1) L が D に含まれるための a, b の条件を求め，その条件をみたす点 $(a,\ b)$ の集合 E を ab 平面上に図示せよ。

(2) t は正の実数とし，ab 平面上で連立不等式 $a \geqq t$, $b \geqq 0$ をみたす点 $(a,\ b)$ の集合を F_t とする。(1)の E と F_t の共通部分の面積を $S(t)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{t \to +0} S(t)$ を求めよ。

必要なら $\displaystyle\lim_{x \to +0} x \log x = 0$ であることは用いてよい。

2 xy 平面上の原点$(0,0)$に駒をおき，以下の操作を繰り返し，駒を xy 平面上で移動させる。

操作：サイコロを投げ，出た目を k $(1 \leqq k \leqq 6)$ とする。

(i) k が奇数のとき，x 軸方向に k だけ移動させる。

(ii) k が偶数のとき，y 軸方向に $\dfrac{k}{2}$ だけ移動させる。

例えば駒が$(1,1)$にあるとき，3の目が出れば$(4,1)$に，4の目が出れば$(1,3)$に移動させる。

以下の問いに答えよ。ただし実数 x について，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

(1) p，q は0以上の整数とする。点$(p,\ q)$に到達させるために必要なサイコロを投げる最小の回数を $N(p,\ q)$ とおく。

$$\left[\frac{p}{5}\right] \leqq N(p,\ 0) \leqq \left[\frac{p}{5}\right]+2,\quad \left[\frac{q}{3}\right] \leqq N(0,\ q) \leqq \left[\frac{q}{3}\right]+1$$

であることを証明せよ。

(2) a，b は0以上の整数とする。ただし，a，b の少なくとも一方は0でないとする。極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{N(an,\ bn)}{(a+b)n}$ を求めよ。ここでnを自然数とする。

(3) (2)の極限値を $R(a,\ b)$ とおく。$R(a,\ b)$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{3}$ 四面体ABCDは$AC=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$AD=1$，$BC=\frac{1}{2}$であり，辺ADは面ABCに垂直であり，辺BCは面ACDに垂直であるとする。

(1) 辺BDの長さを求めよ。

(2) 点Cから辺ABに下ろした垂線の長さを求めよ。

次に四面体ABCDから十分に離れたところに直線ABと平行な平面αを一つとる。αに垂直な平行光線を四面体ABCDにあてて，α上に影をつくる。その影の面積をSとする。

(3) 面ABDがαに平行であるときのSを求めよ。

(4) 直線ABを軸として四面体ABCDを1回転させるとき，Sの最大値，最小値を求めよ。

4 nは2以上の偶数とする。n個の式$x-k$ $(k=0, 1, 2, \cdots\cdots, n-1)$の積を$f_n(x)$とする。すなわち

$$f_n(x)=x(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-n+1)$$

である。

(1) 関数$y=f_n(x)$のグラフはy軸に平行なある直線に関して対称であることを証明せよ。

(2) xの方程式$f_n(x)=n!$はちょうど2つの実数解をもつことを証明し，その実数解を求めよ。

(3) (2)の実数解をα，β $(\alpha<\beta)$とするとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!}\int_{\alpha}^{\beta}|f_n(x)|\,dx$$

を求めよ。

(計　算　用　紙)