

1

(1)

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$$

より,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{2x} &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \\ f'(x) &> 0 \\ \Leftrightarrow e^{2x} - 1 &> 0 \quad (\because 2e^x > 0) \\ \Leftrightarrow e^{2x} &> 1 \\ \Leftrightarrow x &> 0 \quad (\because e > 1) \end{aligned}$$

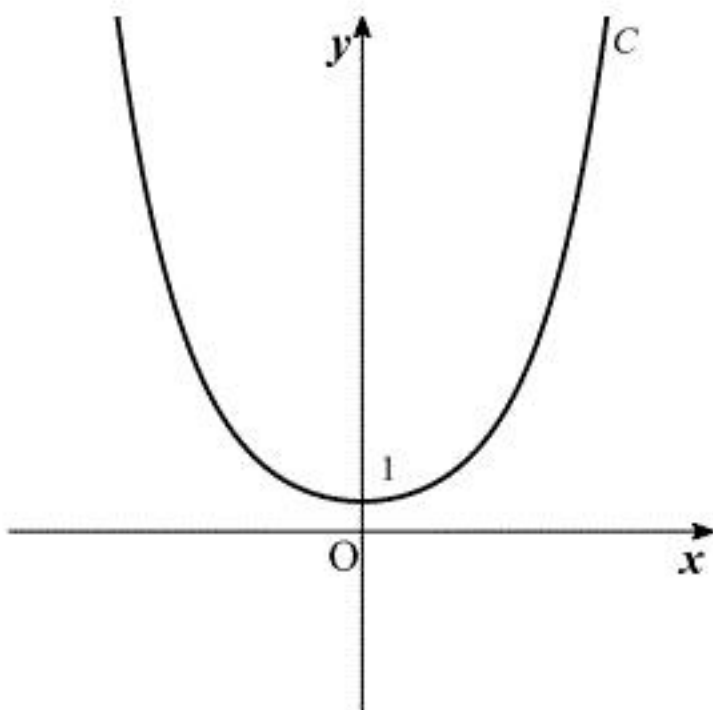
より, $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

また,

$$f''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$$

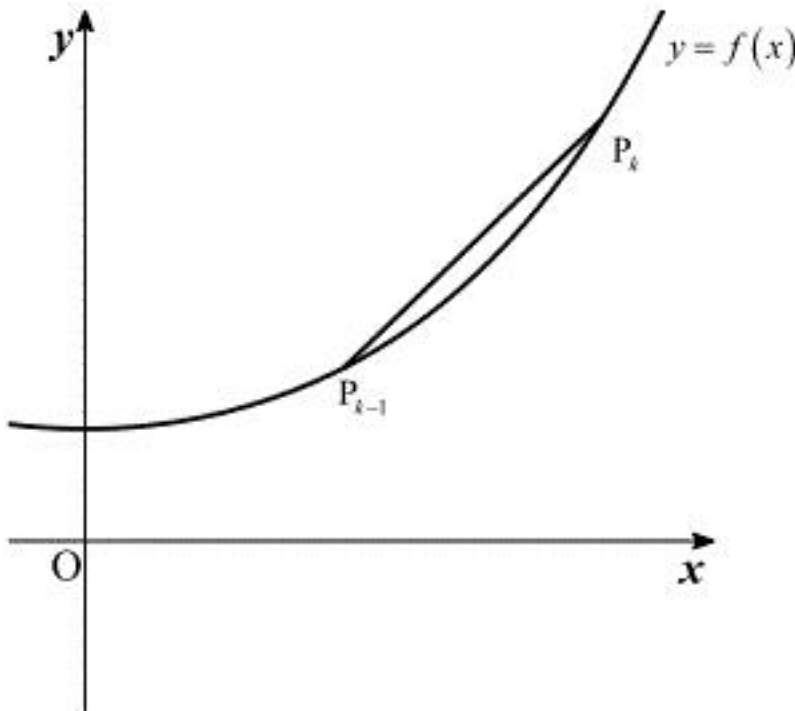
より, $f(x)$ は下に凸である。ゆえに, 曲線 C の概形は以下のようになる。



(答) 前図

(2)

(1)より, 曲線 C は下に凸であるから, 線分 $P_k P_{k+1}$ と曲線 C の位置関係は以下のようになる。



ここで, 曲線 C 及び x 軸と直線 $x = k-1, x = k$ によって囲まれた面積は,

$$\begin{aligned} \int_{k-1}^k f(x) dx &= \int_{k-1}^k \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} [e^x - e^{-x}]_{k-1}^k \\ &= \frac{e^k - e^{k-1} - e^{-k} + e^{-(k-1)}}{2} \end{aligned}$$

となる。また, 直線 $P_{k-1} P_k$ 及び x 軸と直線 $x = k-1, x = k$ によって囲まれた台形の面積は,

$$\begin{aligned} \{f(k-1) + f(k)\} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} &= \left(\frac{e^k + e^{-k}}{2} + \frac{e^{k-1} + e^{-(k-1)}}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{e^k + e^{-k} + e^{k-1} + e^{-(k-1)}}{4} \end{aligned}$$

となる。 a_k はこれらの差として求まるから,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{e^k + e^{-k} + e^{k-1} + e^{-(k-1)}}{4} - \frac{e^k - e^{k-1} - e^{-k} + e^{-(k-1)}}{2} \\ &= \frac{-e^k + 3e^{k-1} + 3e^{-k} - e^{-(k-1)}}{4} \\ &= \frac{(3-e)e^{k-1} + (3-e)e^{-k}}{4} \\ &= \frac{(3-e)(e^{k-1} + e^{-k})}{4} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad a_k = \frac{(3-e)(e^{k-1} + e^{-k})}{4}$$

(3)

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \frac{3-e}{4} \left(\sum_{k=1}^n e^{k-1} + \sum_{k=1}^n e^{-k} \right) \\ &= \frac{3-e}{4} \left\{ \frac{e^n - 1}{e - 1} + \frac{e^{-1}(1 - e^{-n})}{1 - e^{-1}} \right\} \\ &= \frac{3-e}{4} \cdot \frac{(e^n - 1) + (1 - e^{-n})}{e - 1} \\ &= \frac{(3-e)(e^n - e^{-n})}{4(e-1)} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad S_n = \frac{(3-e)(e^n - e^{-n})}{4(e-1)}$$

(4)

$$\begin{aligned} l_n &= \int_0^n \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx \\ &= \int_0^n \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2} dx \\ &= \int_0^n \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2} dx \\ &= \int_0^n \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx \quad \left(\because \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0 \right) \\ &= \frac{1}{2} [e^x - e^{-x}]_0^n \\ &= \frac{1}{2} \{ (e^n - e^{-n}) - (1 - 1) \} \\ &= \frac{e^n - e^{-n}}{2} \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{l_n} &= \frac{\frac{(3-e)(e^n - e^{-n})}{4(e-1)}}{\frac{e^n - e^{-n}}{2}} \\ &= \frac{3-e}{2(e-1)} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \frac{S_n}{l_n} = \frac{3-e}{2(e-1)}$$

(1)

原点が円 C の中心であるから、 α, z の表す点をそれぞれ A, P とすると $A = P$ または

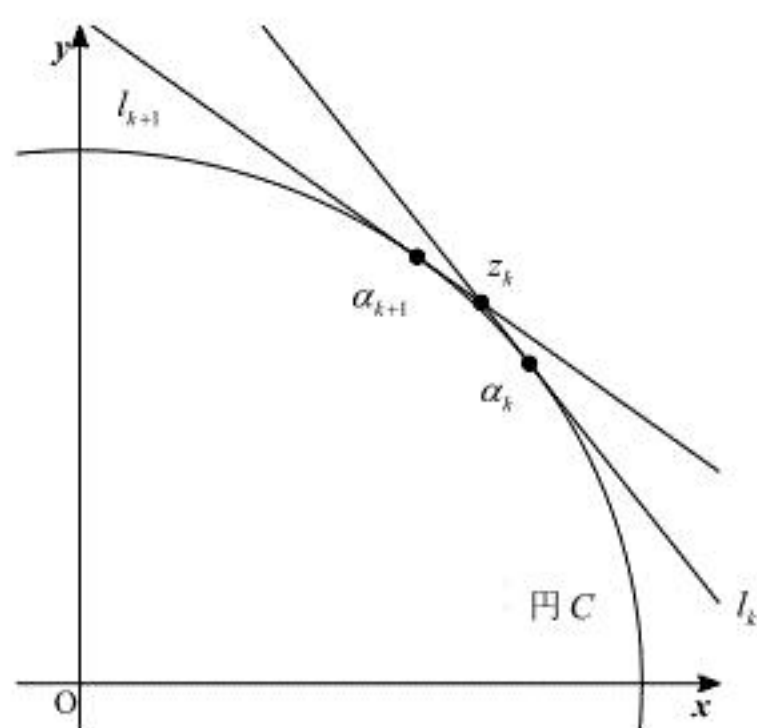
$\angle OAP = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ である。このとき、 $\frac{z-\alpha}{0-\alpha}$ は 0 または純虚数であるから、

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{z-\alpha}{0-\alpha}\right)} &= -\left(\frac{z-\alpha}{0-\alpha}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{\bar{z}-\bar{\alpha}}{-\bar{\alpha}} &= \frac{z-\alpha}{\alpha} \\ \Leftrightarrow -\alpha^2(\bar{z}-\bar{\alpha}) &= \alpha\bar{\alpha}(z-\alpha) \quad (\because \alpha \neq 0) \\ \Leftrightarrow -\alpha^2\bar{z} + \alpha|\alpha|^2 &= |\alpha|^2 z - \alpha|\alpha|^2 \\ \Leftrightarrow -\alpha^2\bar{z} + \alpha &= z - \alpha \quad (\because |\alpha| = 1) \\ \Leftrightarrow z + \alpha^2\bar{z} &= 2\alpha\end{aligned}$$

となり、等式が示される。

(証明終)

(2)



便宜上 $\alpha_{n+1} = \alpha_1, z_{n+1} = z_1, l_{n+1} = l_1$ と定義する。 $1 \leq k \leq n$ のとき、 z_k は l_k, l_{k+1} 上の点であるから、(1)より、

$$\begin{cases} z_k + \alpha_k^2 \bar{z}_k = 2\alpha_k \\ z_k + \alpha_{k+1}^2 \bar{z}_k = 2\alpha_{k+1} \end{cases}$$

が成り立つ。辺々引いて、

$$\begin{aligned}(\alpha_k^2 - \alpha_{k+1}^2) \bar{z}_k &= 2(\alpha_k - \alpha_{k+1}) \\ \Leftrightarrow (\alpha_k + \alpha_{k+1})(\alpha_k - \alpha_{k+1}) \bar{z}_k &= 2(\alpha_k - \alpha_{k+1}) \\ \Leftrightarrow (\alpha_k + \alpha_{k+1}) \bar{z}_k &= 2 \quad (\because \alpha_k^2 \neq \alpha_{k+1}^2) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{z_k} &= \frac{\alpha_k + \alpha_{k+1}}{2}\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k} &= \sum_{k=1}^n \frac{\bar{\alpha}_k + \bar{\alpha}_{k+1}}{2} \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k} &= \frac{\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2}{2} + \frac{\bar{\alpha}_2 + \bar{\alpha}_3}{2} + \dots + \frac{\bar{\alpha}_n + \bar{\alpha}_1}{2} \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k} &= \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 + \dots + \bar{\alpha}_n \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k} &= \sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_k\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(3)

(2)より、

$$\begin{aligned}(\alpha - 1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k} &= (\alpha - 1) \sum_{k=1}^n \bar{\alpha}_k \\ &= (\alpha - 1) \sum_{k=1}^n \left\{ \cos\left(-\frac{k\pi}{2n}\right) + i \sin\left(-\frac{k\pi}{2n}\right) \right\}\end{aligned}$$

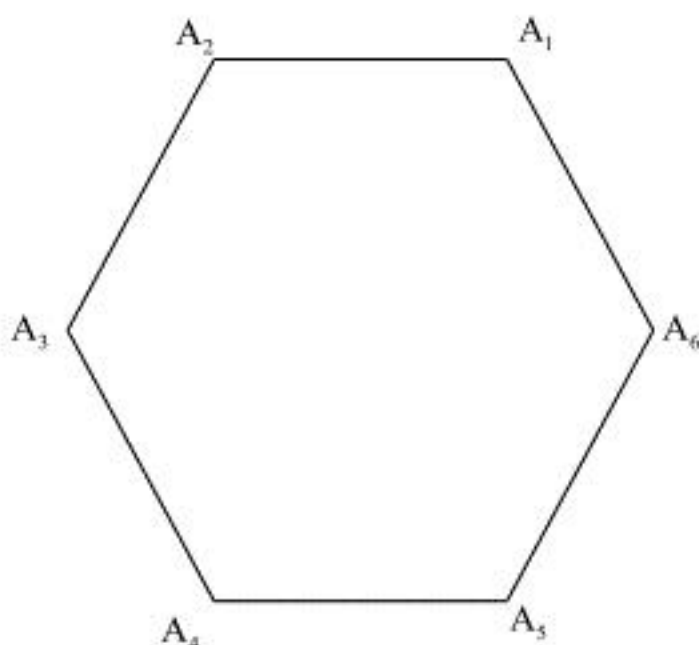
となる。ド・モアブルの定理より、 $\cos\left(-\frac{k\pi}{2n}\right) + i \sin\left(-\frac{k\pi}{2n}\right) = \alpha^{-k}$ であるから、

$$\begin{aligned}(\alpha - 1) \sum_{k=1}^n \left\{ \cos\left(-\frac{k\pi}{2n}\right) + i \sin\left(-\frac{k\pi}{2n}\right) \right\} &= (\alpha - 1) \sum_{k=1}^n \alpha^{-k} \\ &= (\alpha - 1) \cdot \frac{\alpha^{-1}(1 - \alpha^{-n})}{1 - \alpha^{-1}} \\ &= 1 - \alpha^{-n} \\ &= 1 - \left\{ \cos\left(-\frac{n\pi}{2n}\right) + i \sin\left(-\frac{n\pi}{2n}\right) \right\} \\ &= 1 + i\end{aligned}$$

となる。

(答) $1+i$

(1)



$n=3$ のとき、上図のように正6角形の頂点に名前をつける。三角形の選び方の総数は、
 ${}_6C_3=20$ (通り)

であり、これらは同様に確からしい。直角三角形となる場合の数は、斜辺は A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 の3通りであり、それぞれに対し、もう1つの頂点の選び方は4通りであるから、

$$3 \cdot 4 = 12 \text{ (通り)}$$

である。鋭角三角形の選び方は $\triangle A_1A_3A_5, \triangle A_2A_4A_6$ の2通りである。以上より、

$$p_3 = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$q_3 = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

である。

$$\text{(答)} \quad p_3 = \frac{3}{5}, q_3 = \frac{1}{10}$$

(2)

正 $2n$ 角形の頂点に反時計回りに順に $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ と名前をつける。まず、三角形の選び方の総数は、

$${}_{2n}C_3 = \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= \frac{2n(2n-1)(n-1)}{3}$$

であり、これらは同様に確からしい。 T が直角三角形のとき、斜辺の選び方は、
 $A_1A_{n+1}, A_2A_{n+2}, \dots, A_nA_{2n}$ の n 通りで、それぞれに対し残りの1頂点の選び方は $2n-2$ 通りあるから、直角三角形の選び方は、

$$n(2n-2) \text{ (通り)}$$

である。よって、

$$p_n = \frac{2n(n-1)}{\frac{2n(2n-1)(n-1)}{3}} = \frac{3}{2n-1}$$

である。

$$\text{(答)} \quad p_n = \frac{3}{2n-1}$$

(3)

まず、鈍角三角形を考える。まずは頂点の1つを A_1 とし、

$$\text{辺 } A_1A_{n+2}, A_1A_{n+3}, A_1A_{n+4}, \dots, A_1A_{2n-1}$$

を最大辺にもつ鈍角三角形を考える。ある辺 A_1A_k ($k=n+2, n+3, \dots, 2n-1$) を最大辺とする鈍角三角形ができるためのもう1つの頂点の選び方は $A_{k+1}, A_{k+2}, \dots, A_{2n}$ の

$$2n - (k+1) + 1 = 2n - k \text{ (通り)}$$

である。 $k=n+2, n+3, \dots, 2n-1$ について、これを足し合わせると、

$$\sum_{k=n+2}^{2n-1} (2n-k) = (n-2) + (n-1) + \dots + 2 + 1$$

$$= \frac{(n-2)+1}{2} \cdot (n-2)$$

$$= \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

となる。最初に選ぶ頂点が $A_2, A_3, \dots, A_{2n}$ の場合も同様に考えると、鈍角三角形の選び方は、

$$\frac{(n-2)(n-1)}{2} \cdot 2n = n(n-1)(n-2) \text{ (通り)}$$

である。三角形の選び方の総数は $\frac{2n(2n-1)(n-1)}{3}$ 通りであるから、鋭角三角形となる場合の数はこれから直角三角形と鈍角三角形の場合を除いて、

$$\frac{2n(2n-1)(n-1)}{3} - n(n-1)(n-2) - n(2n-2) = n(n-1) \left\{ \frac{2}{3}(2n-1) - (n-2) - 2 \right\}$$

$$= n(n-1) \left(\frac{1}{3}n - \frac{2}{3} \right)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$$

となる。よって、

$$q_n = \frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{3}}{\frac{2n(2n-1)(n-1)}{3}} = \frac{n-2}{2(2n-1)}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad q_n = \frac{n-2}{2(2n-1)}$$

(4)

(3)より、

$$q_n = \frac{n-2}{2(2n-1)} = \frac{1 - \frac{2}{n}}{2 \left(2 - \frac{1}{n} \right)}$$

と変形できるので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \frac{1-0}{2(2-0)} = \frac{1}{4}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{4}$$