

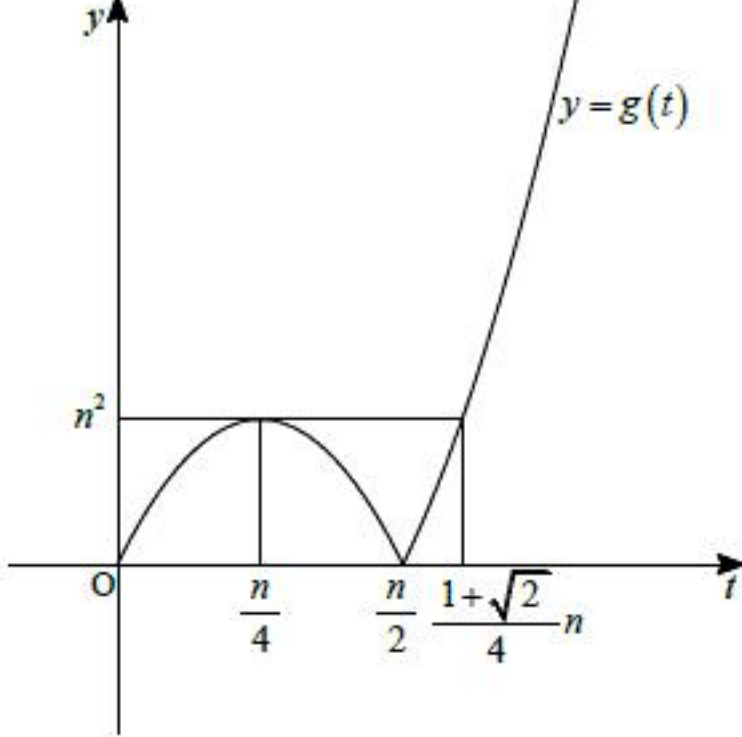
1

(1)

$t = \tan^2 \theta$ とおく。ただし、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ より、 $0 \leq t \leq 3$ であることに注意する。

$$\begin{aligned} f_n(\theta) &= |16 \tan^4 \theta - 8n \tan^2 \theta| \\ &= |16t^2 - 8nt| \\ &= 16 \left| t \left(t - \frac{n}{2} \right) \right| \end{aligned}$$

であるから、関数 $g(t)$ を $g(t) = 16 \left| t \left(t - \frac{n}{2} \right) \right|$ において、この関数の最大値を調べる。 ty 平面上に曲線 $y = g(t)$ のグラフを図示すると、以下の図のようになる。



ここで、 $t \geq 0$ において $g(t) = g\left(\frac{n}{4}\right)$ を満たす実数 t は

$$\begin{aligned} 16t^2 - 8nt &= g\left(\frac{n}{4}\right) \\ \Leftrightarrow 16t^2 - 8nt - n^2 &= 0 \\ \therefore t &= \frac{1+\sqrt{2}}{4}n \quad (\because t \geq 0 \text{ より } t = \frac{1-\sqrt{2}}{4}n \text{ は不適}) \end{aligned}$$

であることに注意しておく。以下、 n の値で場合分けして、 M_n を求める。

[1] $\frac{1+\sqrt{2}}{4}n < 3 \Leftrightarrow n < 12(\sqrt{2}-1) = \sqrt{288}-12$ のとき

このとき、 $16 < \sqrt{288} < 17 \Leftrightarrow 4 < \sqrt{288}-12 < 5$ かつ n は自然数より

$$n = 1, 2, 3, 4$$

となる。このとき、

$$M_n = g(3) = |144 - 24n| = 144 - 24n \quad (\because 1 \leq n \leq 4)$$

である。

[2] $\frac{n}{4} \leq 3 \leq \frac{1+\sqrt{2}}{4}n \Leftrightarrow 12(\sqrt{2}-1) \leq n \leq 12$ のとき

このとき、

$$n = 5, 6, \dots, 12$$

となり、

$$M_n = g\left(\frac{n}{4}\right) = n^2$$

である。

[3] $3 < \frac{n}{4} \Leftrightarrow n > 12$ のとき

このとき、

$$n = 13, 14, \dots$$

となり、

$$M_n = g(3) = |144 - 24n| = 24n - 144 \quad (\because n > 12)$$

である。

以上[1]-[3]より、 M_n は

$$M_n = \begin{cases} 144 - 24n & (n = 1, 2, 3, 4) \\ n^2 & (n = 5, 6, \dots, 12) \\ 24n - 144 & (n = 13, 14, \dots) \end{cases}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad M_n = \begin{cases} 144 - 24n & (n = 1, 2, 3, 4) \\ n^2 & (n = 5, 6, \dots, 12) \\ 24n - 144 & (n = 13, 14, \dots) \end{cases}$$

(2)

[1] $n = 1, 2, 3, 4$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n M_k \\ &= \sum_{k=1}^n (144 - 24k) \\ &= 144n - 24 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= 12n(11-n) \end{aligned}$$

となる。

[2] $n = 5, 6, \dots, 12$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^4 M_k + \sum_{k=5}^n M_k \\ &= 12 \cdot 4 \cdot 7 + \sum_{k=5}^n k^2 \\ &= 336 + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9 \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 306 \end{aligned}$$

となる。

[3] $n = 13, 14, \dots$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{12} M_k + \sum_{k=13}^n M_k \\ &= \frac{1}{6} \cdot 12 \cdot 13 \cdot 25 + 306 + \sum_{k=13}^n (24k - 144) \\ &= 956 + 24 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - 24 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 13 - 144(n-12) \\ &= 12n(n-11) + 812 \end{aligned}$$

となる。

以上[1]-[3]より、 S_n は

$$S_n = \begin{cases} 12n(11-n) & (n = 1, 2, 3, 4) \\ \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 306 & (n = 5, 6, \dots, 12) \\ 12n(n-11) + 812 & (n = 13, 14, \dots) \end{cases}$$

と表せることがわかる。

$$(\text{答}) \quad S_n = \begin{cases} 12n(11-n) & (n = 1, 2, 3, 4) \\ \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 306 & (n = 5, 6, \dots, 12) \\ 12n(n-11) + 812 & (n = 13, 14, \dots) \end{cases}$$

(3)

任意の自然数 n に対し $M_n > 0$ で、 $S_n = \sum_{k=1}^n M_k$ であるから、数列 $\{S_n\}$ は単調増加数列であり、

$$S_{12} = 956 < 2972$$

であるから、 $n \geq 13$ の場合を考えれば十分である。このとき、

$$\begin{aligned} S_n &= 2972 \\ \Leftrightarrow 12n(n-11) + 812 &= 2972 \\ \Leftrightarrow n^2 - 11n - 180 &= 0 \\ \Leftrightarrow (n+9)(n-20) &= 0 \\ \therefore n &= 20 \quad (\because n \geq 13) \end{aligned}$$

である。よって、 $f_n(\theta)$ の最大値は

$$M_{20} = 24 \cdot 20 - 144 = 336$$

で、このとき

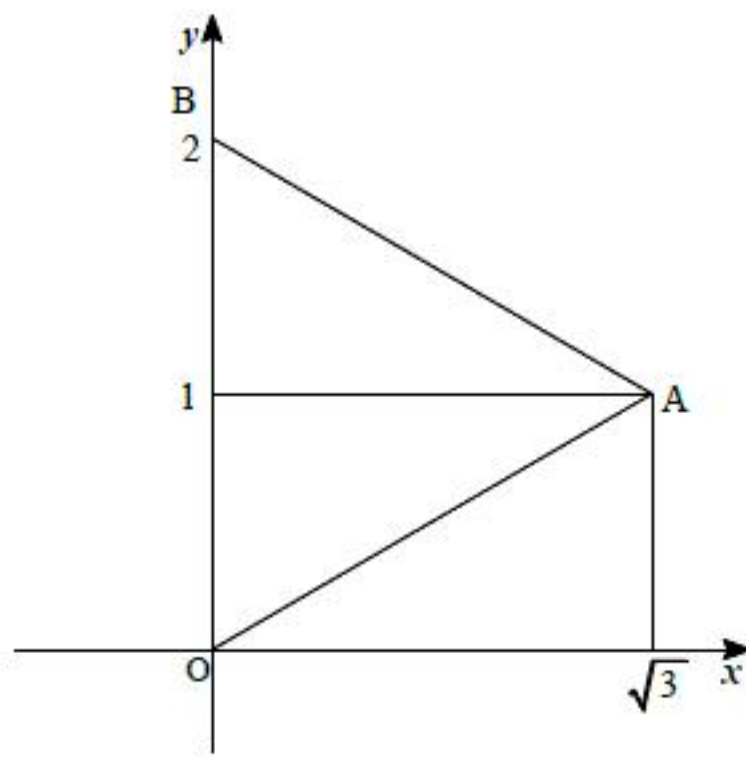
$$\begin{aligned} t &= 3 \\ \Leftrightarrow \tan \theta &= \sqrt{3} \\ \therefore \theta &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad f_n(\theta) \text{ の最大値 } 336, \theta = \frac{\pi}{3}$$

[2]

(1)



動点 P は、時間 t で A に移動するので、 $0 \leq t \leq 2$ において

$$\overrightarrow{OP} = \frac{t}{2}(\sqrt{3}, 1)$$

である。また、

[1] $0 \leq t \leq 1$ のとき

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} = (\sqrt{3}, 1)$$

$$\therefore \overrightarrow{PQ} = (\sqrt{3}, 1) - \frac{t}{2}(\sqrt{3}, 1) = \frac{2-t}{2}(\sqrt{3}, 1)$$

である。

[2] $1 \leq t \leq \frac{3}{2}$ のとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OA} + 2(t-1)\overrightarrow{AB} \\ &= (\sqrt{3}, 1) + 2(t-1)(-\sqrt{3}, 1) \\ &= ((3-2t)\sqrt{3}, 2t-1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= ((3-2t)\sqrt{3}, 2t-1) - \frac{t}{2}(\sqrt{3}, 1) \\ &= \left(\left(3-\frac{5}{2}t\right)\sqrt{3}, \frac{3}{2}t-1 \right)\end{aligned}$$

である。

[3] $\frac{3}{2} \leq t \leq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OB} + 2\left(t-\frac{3}{2}\right)\overrightarrow{BO} \\ &= (4-2t)\overrightarrow{OB} \\ &= (0, 8-4t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= (0, 8-4t) - \frac{t}{2}(\sqrt{3}, 1) \\ &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t, 8-\frac{9}{2}t \right)\end{aligned}$$

である。

以上[1]~[3]より、 $\overrightarrow{PQ}$ は t を用いて

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{cases} \frac{2-t}{2}(\sqrt{3}, 1) & (0 \leq t \leq 1) \\ \left(\left(3-\frac{5}{2}t\right)\sqrt{3}, \frac{3}{2}t-1 \right) & (1 \leq t \leq \frac{3}{2}) \\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t, 8-\frac{9}{2}t \right) & (\frac{3}{2} \leq t \leq 2) \end{cases}$$

と表せることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = \frac{t}{2}(\sqrt{3}, 1), \quad \overrightarrow{PQ} = \begin{cases} \frac{2-t}{2}(\sqrt{3}, 1) & (0 \leq t \leq 1) \\ \left(\left(3-\frac{5}{2}t\right)\sqrt{3}, \frac{3}{2}t-1 \right) & (1 \leq t \leq \frac{3}{2}) \\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t, 8-\frac{9}{2}t \right) & (\frac{3}{2} \leq t \leq 2) \end{cases}$$

(2)

[1] $0 \leq t \leq 1$ のとき

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{2-t}{2}(\sqrt{3}, 1)$$

より、 $t=1$ のとき $|\overrightarrow{PQ}|$ は最小値

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

をとる。

[2] $1 \leq t \leq \frac{3}{2}$ のとき

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PQ}|^2 &= 3\left(3-\frac{5}{2}t\right)^2 + \left(\frac{3}{2}t-1\right)^2 \\ &= 21t^2 - 48t + 28 \\ &= 21\left(t-\frac{8}{7}\right)^2 + \frac{4}{7}\end{aligned}$$

より、 $|\overrightarrow{PQ}|$ は $t=\frac{8}{7}$ のとき、最小値 $\sqrt{\frac{4}{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ をとる。

[3] $\frac{3}{2} \leq t \leq 2$ のとき

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PQ}|^2 &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2 + \left(8-\frac{9}{2}t\right)^2 \\ &= 21t^2 - 72t + 64 \\ &= 21\left(t-\frac{12}{7}\right)^2 + \frac{16}{7}\end{aligned}$$

より、 $|\overrightarrow{PQ}|$ は $t=\frac{12}{7}$ のとき、最小値 $\sqrt{\frac{16}{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$ をとる。

以上[1]~[3]より、 $0 \leq t \leq 2$ において、 $|\overrightarrow{PQ}|$ は

$$t=\frac{8}{7} \text{ のとき、最小値 } \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

をとることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

(3)

$\triangle OAB$ の面積は $2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}$ より、 $\triangle OPQ$ の面積を $S(t)$ とおくと、

$$S(t) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

となる t (ただし、 $1 < t < 2$) を求めればよい。ここで、

$$\begin{aligned}S(t) &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{PO}|^2 |\overrightarrow{PQ}|^2 - (\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PQ})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{t^2 |\overrightarrow{PQ}|^2 - (\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PQ})^2}\end{aligned}$$

である。

[1] $1 < t \leq \frac{3}{2}$ のとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PQ} &= -\frac{t}{2}(\sqrt{3}, 1) \cdot \left(\left(3-\frac{5}{2}t\right)\sqrt{3}, \frac{3}{2}t-1 \right) \\ &= t(3t-4)\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}S(t) &= \frac{1}{2} \sqrt{t^2 (21t^2 - 48t + 28) - t^2 (3t-4)^2} \\ &= \sqrt{3t^2 (t-1)^2} \\ &= \sqrt{3}t(t-1) \quad (\because t > 1)\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}S(t) &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \Leftrightarrow \sqrt{3}t(t-1) &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \Leftrightarrow 3t^2 - 3t - 1 &= 0 \\ \therefore t &= \frac{3+\sqrt{21}}{6} \quad (\because 1 < t \leq \frac{3}{2})\end{aligned}$$

となる。

[2] $\frac{3}{2} < t < 2$ のとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PQ} &= -\frac{t}{2}(\sqrt{3}, 1) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t, 8-\frac{9}{2}t \right) \\ &= t(3t-4)\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}S(t) &= \frac{1}{2} \sqrt{t^2 (21t^2 - 72t + 64) - t^2 (3t-4)^2} \\ &= \sqrt{3t^2 (t-2)^2} \\ &= \sqrt{3}|t(t-2)| \\ &= -\sqrt{3}t(t-2) \quad \left(\because \frac{3}{2} < t < 2 \right)\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}S(t) &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \Leftrightarrow -\sqrt{3}t(t-2) &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \Leftrightarrow 3t^2 - 6t + 1 &= 0 \\ \therefore t &= \frac{3+\sqrt{6}}{3} \quad \left(\because \frac{3}{2} < t < 2 \right)\end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]より、求める t は $t = \frac{3+\sqrt{21}}{6}, \frac{3+\sqrt{6}}{3}$ であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{3+\sqrt{21}}{6}, \frac{3+\sqrt{6}}{3}$$

3

(1)

$$g(x) = x^3 - 12x + b,$$

$$g'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$$

より、 $g(x)$ の $x \geq 0$ における増減表は次のようになる。

x	0	...	2	...
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

$x \geq 0$ の範囲で $C_2: y = g(x)$ が x 軸に接するので

$$g(2) = 0$$

$$\Leftrightarrow b - 16 = 0$$

$$\therefore b = 16$$

となる。また

$$f(x) = x^2 + ax + 16$$

$$= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}a^2 + 16$$

であり、 $C_1: y = f(x)$ が $x \leq 0$ の範囲で x 軸に接するので

$$-\frac{a}{2} \leq 0 \text{ かつ } -\frac{1}{4}a^2 + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow a \geq 0 \text{ かつ } a = \pm 8$$

$$\therefore a = 8$$

となる。以上より $(a, b) = (8, 16)$ である。

(答) $(a, b) = (8, 16)$

(2)

(1)より

$$f(x) = x^2 + 8x + 16, f'(x) = 2x + 8$$

であるから、 C_1 上の点 $(t, t^2 + 8t + 16)$ (ただし、 $t \leq 0$)における接線の方程式は

$$y = (2t + 8)(x - t) + t^2 + 8t + 16$$

である。これが点 $(0, -16)$ を通るとき、

$$-16 = -t(2t + 8) + t^2 + 8t + 16$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 32$$

$$\therefore t = -4\sqrt{2} \quad (t \leq 0)$$

となるから、

$$\ell_1: y = 8(1 - \sqrt{2})x - 16, \text{ 接点の座標は } (-4\sqrt{2}, 48 - 32\sqrt{2})$$

である。また、 C_2 上の点 $(s, s^3 - 12s + 16)$ (ただし、 $s \geq 0$)における接線の方程式は

$$y = (3s^2 - 12)(x - s) + s^3 - 12s + 16$$

である。これが点 $(0, -16)$ を通るとき、

$$-16 = -s(3s^2 - 12) + s^3 - 12s + 16$$

$$\Leftrightarrow s^3 = 16$$

$$\therefore s = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$$

となるから、

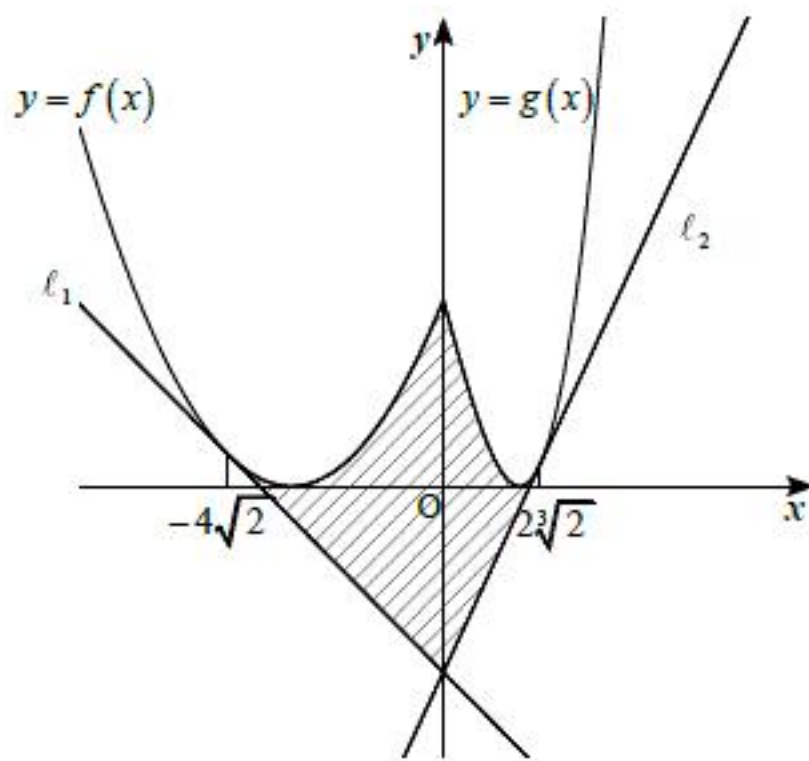
$$\ell_2: y = 12(\sqrt[3]{4} - 1)x - 16, \text{ 接点の座標は } (2\sqrt[3]{2}, 32 - 24\sqrt[3]{2})$$

である。

(答) $\ell_1: y = 8(1 - \sqrt{2})x - 16$, 接点の座標は $(-4\sqrt{2}, 48 - 32\sqrt{2})$

$\ell_2: y = 12(\sqrt[3]{4} - 1)x - 16$, 接点の座標は $(2\sqrt[3]{2}, 32 - 24\sqrt[3]{2})$

(3)



求める面積を S とすると

$$S = \int_{-4\sqrt{2}}^0 \{x^2 + 8x + 16 - 8(1 - \sqrt{2})x + 16\} dx + \int_0^{2\sqrt[3]{2}} \{x^3 - 12x + 16 - 12(\sqrt[3]{4} - 1)x + 16\} dx$$

$$= \int_{-4\sqrt{2}}^0 (x + 4\sqrt{2})^2 dx + \int_0^{2\sqrt[3]{2}} (x^3 - 12\sqrt[3]{4}x + 32) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x + 4\sqrt{2})^3 \right]_{-4\sqrt{2}}^0 + \left[\frac{1}{4}x^4 - 6\sqrt[3]{4}x^2 + 32x \right]_0^{2\sqrt[3]{2}}$$

$$= \frac{128}{3}\sqrt{2} + 8\sqrt[3]{2} - 48\sqrt[3]{2} + 64\sqrt[3]{2}$$

$$= \frac{128}{3}\sqrt{2} + 24\sqrt[3]{2}$$

となる。

(答) $\frac{128}{3}\sqrt{2} + 24\sqrt[3]{2}$