

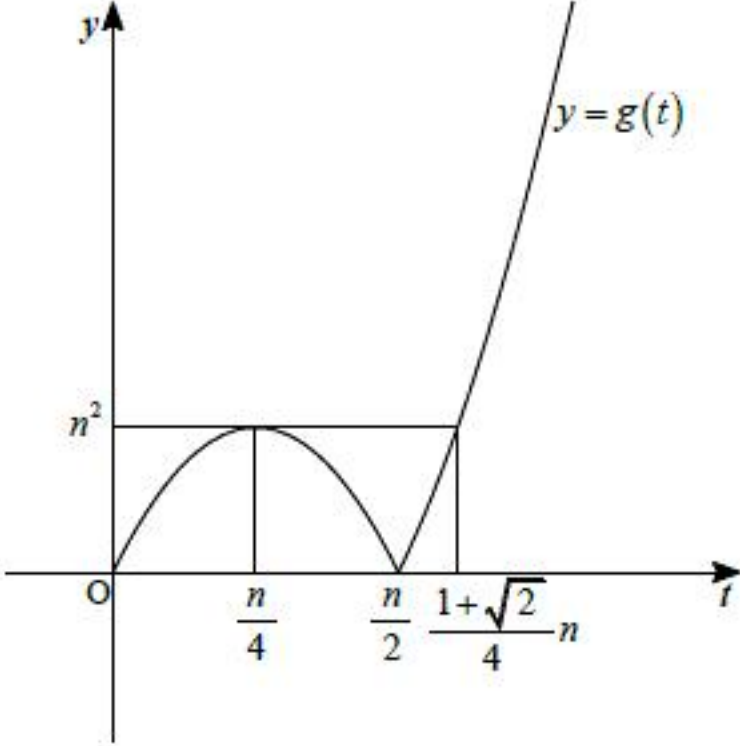
1

(1)

$t = \tan^2 \theta$ とおく。ただし、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ より、 $0 \leq t \leq 3$ であることに注意する。

$$\begin{aligned} f_n(\theta) &= |16 \tan^4 \theta - 8n \tan^2 \theta| \\ &= |16t^2 - 8nt| \\ &= 16 \left| t \left(t - \frac{n}{2} \right) \right| \end{aligned}$$

であるから、関数 $g(t)$ を $g(t) = 16 \left| t \left(t - \frac{n}{2} \right) \right|$ とおいて、この関数の最大値を調べる。 ty 平面上に曲線 $y = g(t)$ のグラフを図示すると、以下の図のようになる。



ここで、 $t \geq 0$ において $g(t) = g\left(\frac{n}{4}\right)$ を満たす実数 t は

$$\begin{aligned} 16t^2 - 8nt &= g\left(\frac{n}{4}\right) \\ \Leftrightarrow 16t^2 - 8nt - n^2 &= 0 \\ \therefore t &= \frac{1+\sqrt{2}}{4}n \quad (\because t \geq 0 \text{ より } t = \frac{1-\sqrt{2}}{4}n \text{ は不適}) \end{aligned}$$

であることに注意しておく。以下、 n の値で場合分けして、 M_n を求める。

[1] $\frac{1+\sqrt{2}}{4}n < 3 \Leftrightarrow n < 12(\sqrt{2}-1) = \sqrt{288}-12$ のとき

このとき、 $16 < \sqrt{288} < 17 \Leftrightarrow 4 < \sqrt{288}-12 < 5$ かつ n は自然数より

$$n = 1, 2, 3, 4$$

となる。このとき、

$$M_n = g(3) = |144 - 24n| = 144 - 24n \quad (\because 1 \leq n \leq 4)$$

である。

[2] $\frac{n}{4} \leq 3 \leq \frac{1+\sqrt{2}}{4}n \Leftrightarrow 12(\sqrt{2}-1) \leq n \leq 12$ のとき

このとき、

$$n = 5, 6, \dots, 12$$

となり、

$$M_n = g\left(\frac{n}{4}\right) = n^2$$

である。

[3] $3 < \frac{n}{4} \Leftrightarrow n > 12$ のとき

このとき、

$$n = 13, 14, \dots$$

となり、

$$M_n = g(3) = |144 - 24n| = 24n - 144 \quad (\because n > 12)$$

である。

以上[1]~[3]より、 M_n は

$$M_n = \begin{cases} 144 - 24n & (n = 1, 2, 3, 4) \\ n^2 & (n = 5, 6, \dots, 12) \\ 24n - 144 & (n = 13, 14, \dots) \end{cases}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad M_n = \begin{cases} 144 - 24n & (n = 1, 2, 3, 4) \\ n^2 & (n = 5, 6, \dots, 12) \\ 24n - 144 & (n = 13, 14, \dots) \end{cases}$$

(2)

[1] $n = 1, 2, 3, 4$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n M_k \\ &= \sum_{k=1}^n (144 - 24k) \\ &= 144n - 24 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= 12n(11-n) \end{aligned}$$

となる。

[2] $n = 5, 6, \dots, 12$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^4 M_k + \sum_{k=5}^n M_k \\ &= 12 \cdot 4 \cdot 7 + \sum_{k=5}^n k^2 \\ &= 336 + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9 \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 306 \end{aligned}$$

となる。

[3] $n = 13, 14, \dots$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{12} M_k + \sum_{k=13}^n M_k \\ &= \frac{1}{6} \cdot 12 \cdot 13 \cdot 25 + 306 + \sum_{k=13}^n (24k - 144) \\ &= 956 + 24 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) - 24 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 13 - 144(n-12) \\ &= 12n(n-11) + 812 \end{aligned}$$

となる。

以上[1]~[3]より、 S_n は

$$S_n = \begin{cases} 12n(11-n) & (n = 1, 2, 3, 4) \\ \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 306 & (n = 5, 6, \dots, 12) \\ 12n(n-11) + 812 & (n = 13, 14, \dots) \end{cases}$$

と表せることがわかる。

$$(\text{答}) \quad S_n = \begin{cases} 12n(11-n) & (n = 1, 2, 3, 4) \\ \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 306 & (n = 5, 6, \dots, 12) \\ 12n(n-11) + 812 & (n = 13, 14, \dots) \end{cases}$$

(3)

任意の自然数 n に対し $M_n > 0$ で、 $S_n = \sum_{k=1}^n M_k$ であるから、数列 $\{S_n\}$ は単調増加数列であり、

$$S_{12} = 956 < 2972$$

であるから、 $n \geq 13$ の場合を考えれば十分である。このとき、

$$\begin{aligned} S_n &= 2972 \\ \Leftrightarrow 12n(n-11) + 812 &= 2972 \\ \Leftrightarrow n^2 - 11n - 180 &= 0 \\ \Leftrightarrow (n+9)(n-20) &= 0 \\ \therefore n &= 20 \quad (\because n \geq 13) \end{aligned}$$

である。よって、 $f_n(\theta)$ の最大値は

$$M_{20} = 24 \cdot 20 - 144 = 336$$

で、このとき

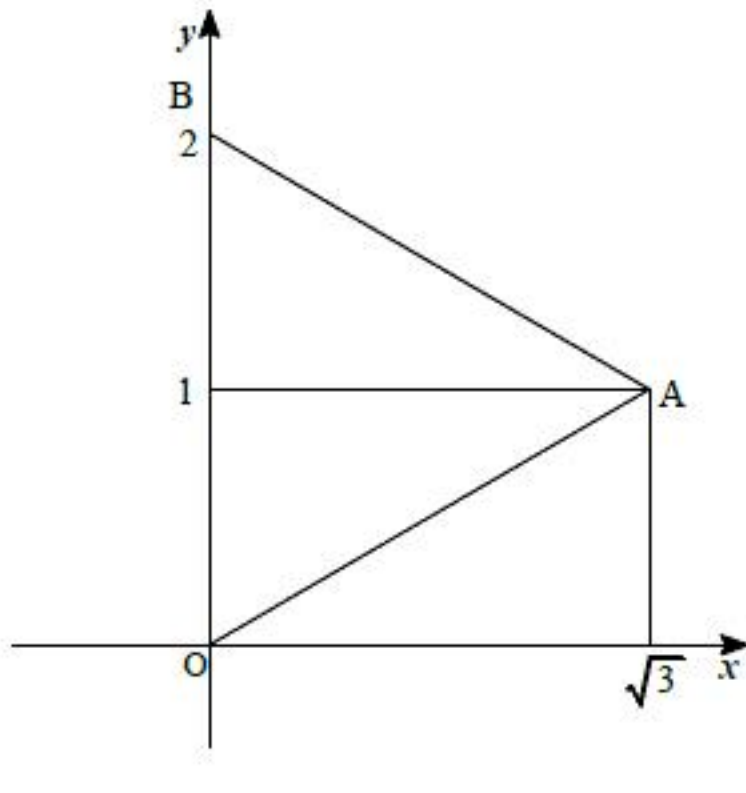
$$\begin{aligned} t &= 3 \\ \Leftrightarrow \tan \theta &= \sqrt{3} \\ \therefore \theta &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad f_n(\theta) \text{ の最大値 } 336, \theta = \frac{\pi}{3}$$

2

(1)



動点Pは、時間2でAに移動するので、 $0 \leq t \leq 2$ において

$$\overrightarrow{OP} = \frac{t}{2}(\sqrt{3}, 1)$$

である。また、

[1] $0 \leq t \leq 1$ のとき

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} = (\sqrt{3}, 1)$$

$$\therefore \overrightarrow{PQ} = (\sqrt{3}, 1) - \frac{t}{2}(\sqrt{3}, 1) = \frac{2-t}{2}(\sqrt{3}, 1)$$

である。

[2] $1 \leq t \leq \frac{3}{2}$ のとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OA} + 2(t-1)\overrightarrow{AB} \\ &= (\sqrt{3}, 1) + 2(t-1)(-\sqrt{3}, 1) \\ &= ((3-2t)\sqrt{3}, 2t-1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= ((3-2t)\sqrt{3}, 2t-1) - \frac{t}{2}(\sqrt{3}, 1) \\ &= \left(\left(3 - \frac{5}{2}t\right)\sqrt{3}, \frac{3}{2}t-1 \right)\end{aligned}$$

である。

[3] $\frac{3}{2} \leq t \leq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OB} + 2\left(t - \frac{3}{2}\right)\overrightarrow{BO} \\ &= (4-2t)\overrightarrow{OB} \\ &= (0, 8-4t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= (0, 8-4t) - \frac{t}{2}(\sqrt{3}, 1) \\ &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t, 8 - \frac{9}{2}t \right)\end{aligned}$$

である。

以上[1]-[3]より、 $\overrightarrow{PQ}$ は t を用いて

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{cases} \frac{2-t}{2}(\sqrt{3}, 1) & (0 \leq t \leq 1) \\ \left(\left(3 - \frac{5}{2}t\right)\sqrt{3}, \frac{3}{2}t-1 \right) & (1 \leq t \leq \frac{3}{2}) \\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t, 8 - \frac{9}{2}t \right) & (\frac{3}{2} \leq t \leq 2) \end{cases}$$

と表せることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = \frac{t}{2}(\sqrt{3}, 1), \quad \overrightarrow{PQ} = \begin{cases} \frac{2-t}{2}(\sqrt{3}, 1) & (0 \leq t \leq 1) \\ \left(\left(3 - \frac{5}{2}t\right)\sqrt{3}, \frac{3}{2}t-1 \right) & (1 \leq t \leq \frac{3}{2}) \\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t, 8 - \frac{9}{2}t \right) & (\frac{3}{2} \leq t \leq 2) \end{cases}$$

(2)

[1] $0 \leq t \leq 1$ のとき

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{2-t}{2}(\sqrt{3}, 1)$$

より、 $t=1$ のとき $|\overrightarrow{PQ}|$ は最小値

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

をとる。

[2] $1 \leq t \leq \frac{3}{2}$ のとき

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PQ}|^2 &= 3\left(3 - \frac{5}{2}t\right)^2 + \left(\frac{3}{2}t-1\right)^2 \\ &= 21t^2 - 48t + 28 \\ &= 21\left(t - \frac{8}{7}\right)^2 + \frac{4}{7}\end{aligned}$$

より、 $|\overrightarrow{PQ}|$ は $t = \frac{8}{7}$ のとき、最小値 $\sqrt{\frac{4}{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$ をとる。

[3] $\frac{3}{2} \leq t \leq 2$ のとき

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PQ}|^2 &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2 + \left(8 - \frac{9}{2}t\right)^2 \\ &= 21t^2 - 72t + 64 \\ &= 21\left(t - \frac{12}{7}\right)^2 + \frac{16}{7}\end{aligned}$$

より、 $|\overrightarrow{PQ}|$ は $t = \frac{12}{7}$ のとき、最小値 $\sqrt{\frac{16}{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$ をとる。

以上[1]-[3]より、 $0 \leq t \leq 2$ において、 $|\overrightarrow{PQ}|$ は

$$t = \frac{8}{7} \text{ のとき、最小値 } \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

をとることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

(3)

$\triangle OAB$ の面積は $2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}$ より、 $\triangle OPQ$ の面積を $S(t)$ とおくと、

$$S(t) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

となる t （ただし、 $1 < t < 2$ ）を求めればよい。ここで、

$$\begin{aligned}S(t) &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{PO}|^2 |\overrightarrow{PQ}|^2 - (\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PQ})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{t^2 |\overrightarrow{PQ}|^2 - (\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PQ})^2}\end{aligned}$$

である。

[1] $1 < t \leq \frac{3}{2}$ のとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PQ} &= -\frac{t}{2}(\sqrt{3}, 1) \cdot \left(\left(3 - \frac{5}{2}t\right)\sqrt{3}, \frac{3}{2}t-1 \right) \\ &= t(3t-4)\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}S(t) &= \frac{1}{2} \sqrt{t^2 (21t^2 - 48t + 28) - t^2 (3t-4)^2} \\ &= \sqrt{3t^2 (t-1)^2} \\ &= \sqrt{3}t(t-1) \quad (\because t > 1)\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}S(t) &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \Leftrightarrow \sqrt{3}t(t-1) &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \Leftrightarrow 3t^2 - 3t - 1 &= 0\end{aligned}$$

$$\therefore t = \frac{3 + \sqrt{21}}{6} \quad (\because 1 < t \leq \frac{3}{2})$$

となる。

[2] $\frac{3}{2} < t < 2$ のとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PQ} &= -\frac{t}{2}(\sqrt{3}, 1) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t, 8 - \frac{9}{2}t \right) \\ &= t(3t-4)\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}S(t) &= \frac{1}{2} \sqrt{t^2 (21t^2 - 72t + 64) - t^2 (3t-4)^2} \\ &= \sqrt{3t^2 (t-2)^2} \\ &= \sqrt{3}|t(t-2)| \\ &= -\sqrt{3}t(t-2) \quad \left(\because \frac{3}{2} < t < 2 \right)\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}S(t) &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \Leftrightarrow -\sqrt{3}t(t-2) &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \Leftrightarrow 3t^2 - 6t + 1 &= 0\end{aligned}$$

$$\therefore t = \frac{3 + \sqrt{6}}{3} \quad \left(\because \frac{3}{2} < t < 2 \right)$$

となる。

以上[1], [2]より、求める t は $t = \frac{3 + \sqrt{21}}{6}, \frac{3 + \sqrt{6}}{3}$ であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{3 + \sqrt{21}}{6}, \frac{3 + \sqrt{6}}{3}$$

3

(1)

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\cos t$ のとりうる値の範囲は

$$0 \leq \cos t \leq 1$$

であるから、 x のとりうる値の範囲は

$$\begin{aligned} 0 &\leq \cos t \leq 1 \\ \Leftrightarrow -1 &\leq 2\cos t - 1 \leq 1 \\ \therefore -1 &\leq x \leq 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -1 \leq x \leq 1$$

(2)

$$x = 2\cos t - 1 \Leftrightarrow \cos t = \frac{x+1}{2},$$

$$y = \sin 2t = 2\sin t \cos t = 2\sqrt{1-\cos^2 t} \cos t$$

$$(\because 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ より, } \sin t \geq 0)$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} y &= 2\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2} \cdot \frac{x+1}{2} \\ &= \frac{x+1}{2} \sqrt{4-(x^2+2x+1)} \\ &= \frac{x+1}{2} \sqrt{-(x+3)(x-1)} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{x+1}{2} \sqrt{-(x+3)(x-1)}$$

(3)

$0 < t < \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2\cos t - 1) = -2\sin t,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(\sin 2t) = \cos 2t$$

であるから、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{\cos 2t}{\sin t} \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$$

となる。よって、 $t = \frac{\pi}{3}$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

である。P $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ であるから、求める接線 ℓ の方程式は

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(4)

(1)で求めた条件、すなわち $-1 \leq x \leq 1$ においては、 $g(x)$ は媒介変数 t ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) を用いて

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}(2\cos t - 1) + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{6}$$

と表すことができる。したがって、 $-1 \leq x \leq 1$ において $f(x) \leq g(x)$ が成り立つことは、

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ において } \sin 2t \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{6}$$

が成り立つことと同値である。以下、このことを示す。

$$h(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos t - \sin 2t + \frac{\sqrt{3}}{6}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} h'(t) &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t - 2\cos 2t \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t - 2(1-2\sin^2 t) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}(2\sqrt{3}\sin^2 t - \sin t - \sqrt{3}) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}\sin t + 1)(2\sin t - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

となる。よって、 $h(t)$ の増減表は次のようになる。

t	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$h'(t)$		-	0	+	
$h(t)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

したがって、 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ において

$$\begin{aligned} h(t) &\geq h\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow \sin 2t &\leq \frac{2}{\sqrt{3}}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

が成り立つから、題意は示された。

(証明終)

(5)

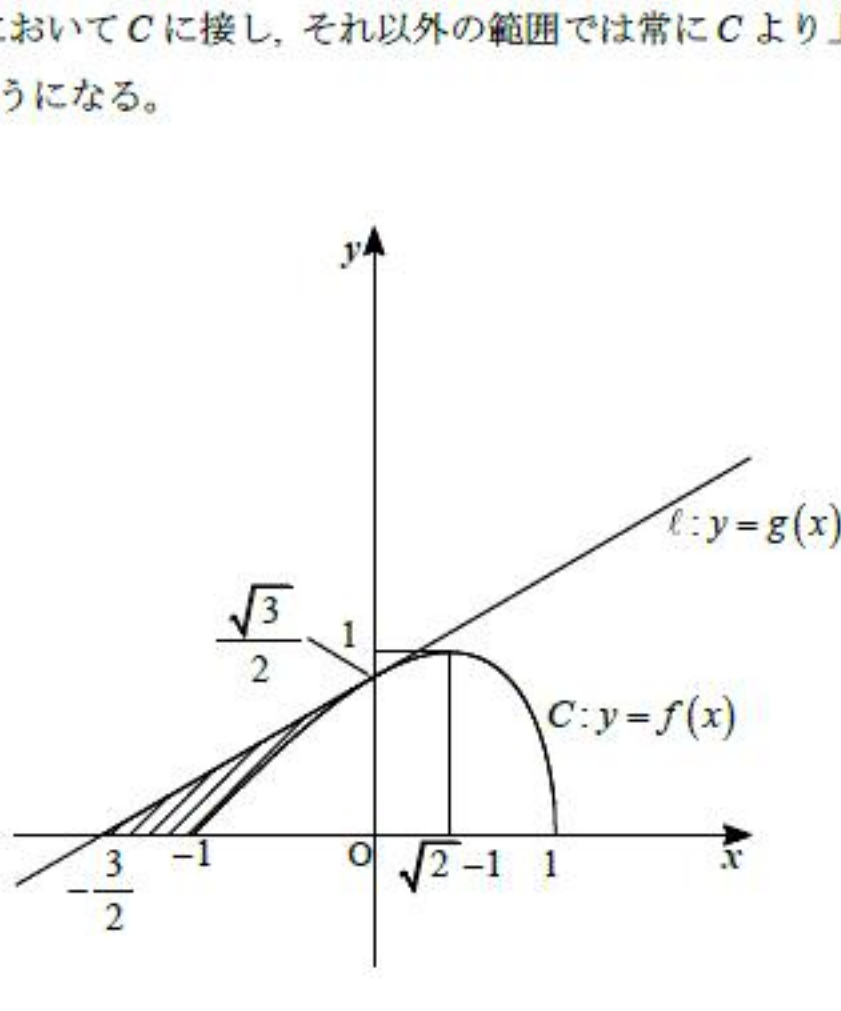
まず、曲線 $y = f(x)$ の概形を調べる。(2)より

$$\frac{dx}{dt} = -2\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos 2t \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$$

であるから、 $y = f(x)$ の増減表は次のようになる。

t	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		-		-	
x	1	$\searrow$	$\sqrt{2}-1$	$\searrow$	-1
$\frac{dy}{dt}$		+	0	-	
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

(4)より ℓ は $x=0$ において C に接し、それ以外の範囲では常に C より上側にあるから、 C と ℓ の概形は下図のようになる。



求める面積は上図斜線部の面積であるから、これを S とおくと

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \int_{-1}^0 f(x) dx$$

となる。ここで、 $x = 2\cos t - 1$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) とおくと

$$f(x) = \sin 2t$$

$$\frac{dx}{dt} = -2\sin t$$

x	-1	$\rightarrow$	0
t	$\frac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{3}$

であるから、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 f(x) dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2t \cdot (-2\sin t) dt \\ &= -4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t \cos t dt \\ &= -4 \left[\frac{1}{3} \sin^3 t \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{4}{3} \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} S &= \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{4}{3} \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) \\ &= \frac{7\sqrt{3}}{8} - \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{7\sqrt{3}}{8} - \frac{4}{3}$$

4

時刻が1増加したとき、点 P_1, P_2, P_3 に移動することをそれぞれ x, y, z と表すことにする。

(1)

求める場合の数は、 x を3個、 y を3個、 z を3個横一列に並べる並べ方の総数に等しく、

$$\frac{9!}{3!3!3!}=1680 \quad (\text{通り})$$

である。

(答) 1680 通り

(2)

$t=3$ で点 B, D, E のどれかにいて、 $t=6$ で点 C, F, H のどれかにいる確率は

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \left(\frac{2}{10}\right)^3 \left(\frac{5}{10}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^3 \left(\frac{5}{10}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{5}{10}\right)^3 \left(\frac{5}{10}\right)^3 \\ &= 2 \cdot \left(\frac{5}{10}\right)^3 \cdot \frac{8+27+125}{10^3} \\ &= \frac{1}{25} \end{aligned}$$

である。よって、

$$0.125p = \frac{1}{25} \quad \therefore p = 0.32$$

となる。

(答) $p = 0.32$

(3)

$t=3$ で $(1, 0, 2)$ に達するには、 xzz, zxz, zzx の3パターンがあるので、求める確率は

$$3 \cdot \frac{2}{10} \cdot \left(\frac{5}{10}\right)^2 = \frac{3}{20}$$

となる。

(答) $\frac{3}{20}$

(4)

[1] $(1, 0, 3)$ に到達する確率

$xzzz, zzzz, zzzx$ の4パターンがあるので、確率は

$$3 \cdot \frac{2}{10} \cdot \left(\frac{5}{10}\right)^3 + \left(\frac{5}{10}\right)^3 \cdot \frac{5}{10} = \frac{11}{80}$$

である。

[2] $(0, 1, 3)$ に到達する確率

$yzzz, zyz, zzyz, zzyy$ の4パターンがあるので、確率は

$$3 \cdot \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{5}{10}\right)^3 + \left(\frac{5}{10}\right)^3 \cdot \frac{5}{10} = \frac{7}{40}$$

である。

[3] $(1, 1, 2)$ に到達する確率

x を1回、 y を1回、 z を2回行うので、確率は

$$\frac{4!}{2!} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \left(\frac{5}{10}\right)^2 = \frac{9}{50}$$

である。

(答) 順に $\frac{11}{80}, \frac{7}{40}, \frac{9}{50}$

(5)

$(1, 1, 3)$ を通るためには、必ず $(1, 0, 3), (0, 1, 3), (1, 1, 2)$ のうちのいずれかの点を通らなければならない。(4)の結果を利用すると、求める確率は

$$\frac{11}{80} \cdot \frac{5}{10} + \frac{7}{40} \cdot \frac{5}{10} + \frac{9}{50} \cdot \frac{5}{10} = \frac{197}{800}$$

となる。

(答) $\frac{197}{800}$