

1

(1)

三角関数の合成を用いて、

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{3} \sin x - \cos x \\ &= 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

となる。

$$-\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6}$$

と合わせて、求める t の範囲は

$$-1 \leq t \leq 2$$

(答) $-1 \leq t \leq 2$

(2)

倍角の公式を用いて、

$$\begin{aligned} t^2 &= 3 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x \\ &= -\sqrt{3} \sin 2x + 1 + 2 \sin^2 x \\ &= -\sqrt{3} \sin 2x + 2 - \cos 2x \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} y &= -\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x - 2a \left(\sqrt{3} \sin x - \cos x \right) + 4 \\ &= t^2 - 2at + 2 \end{aligned}$$

(答) $y = t^2 - 2at + 2$

(3)

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 - 2at + 2 \\ &= (t - a)^2 + 2 - a^2 \end{aligned}$$

とおく。 $-1 \leq t \leq 2$ において $0 \leq y \leq 6$ となる条件を求めればよい。(i) $a < -1$ のとき

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(-1) \text{ かつ } f(2) \leq 6 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq 2a + 3 \text{ かつ } -4a + 6 \leq 6 \\ \Leftrightarrow -\frac{3}{2} &\leq a \text{ かつ } 0 \leq a \end{aligned}$$

 $a < -1$ において、これを満たす a は存在しない。(ii) $-1 \leq a < \frac{1}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(a) \text{ かつ } f(2) \leq 6 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq 2 - a^2 \text{ かつ } -4a + 6 \leq 6 \\ \Leftrightarrow -\sqrt{2} &\leq a \leq \sqrt{2} \text{ かつ } 0 \leq a \end{aligned}$$

よって

$$0 \leq a < \frac{1}{2}$$

(iii) $\frac{1}{2} \leq a < 2$ のとき

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(a) \text{ かつ } f(-1) \leq 6 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq 2 - a^2 \text{ かつ } 2a + 3 \leq 6 \\ \Leftrightarrow -\sqrt{2} &\leq a \leq \sqrt{2} \text{ かつ } a \leq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

よって

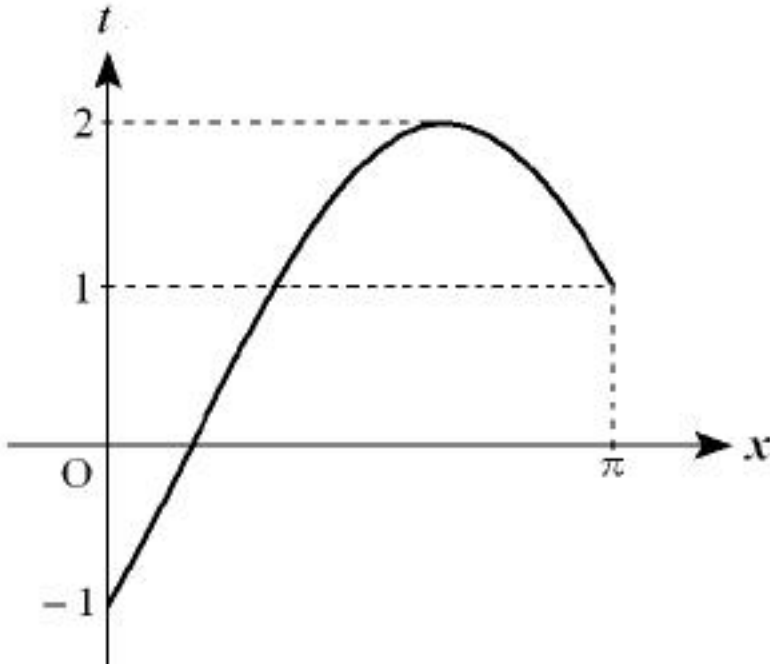
$$\frac{1}{2} \leq a \leq \sqrt{2}$$

(iv) $2 \leq a$ のとき

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(2) \text{ かつ } f(-1) \leq 6 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq -4a + 6 \text{ かつ } 2a + 3 \leq 6 \\ \Leftrightarrow a &\leq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

 $2 \leq a$ において、これを満たす a は存在しない。以上より、 $0 \leq a \leq \sqrt{2}$ (答) $0 \leq a \leq \sqrt{2}$

(4)

図より $1 \leq t < 2$ の t に対しては異なる 2 つの x が対応し、 $-1 \leq t < 1$, $t = 2$ の t に対しては 1 つの x が対応する。よって、 $-\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x - 2a(\sqrt{3} \sin x - \cos x) + 4 = 0$ が異なる 3 個以上の実数解を持つのは、 $f(t) = 0$ が、(i) $1 \leq t < 2$ の異なる解を 2 つ持つとき ... (解が 4 つ)(ii) $1 \leq t < 2$ の解を 1 つと $-1 \leq t < 1$, $t = 2$ の解を 1 つ持つ ... (解が 3 つ)

のいずれかの場合である。

(i) のとき

軸の位置: $1 < a < 2$ $f(t) = 0$ の判別式: $\frac{D}{4} = a^2 - 2 > 0$ 境界条件: $\begin{cases} f(1) = -2a + 3 \geq 0 \\ f(2) = -4a + 6 > 0 \end{cases}$

であることから、以上の式をまとめて、

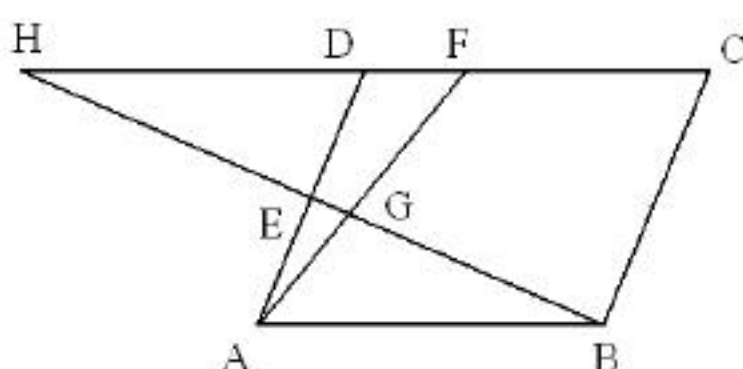
$$\sqrt{2} < a < \frac{3}{2}$$

ここで、 $f(2) = 2f(1)$ なので、 $f(1)$ と $f(2)$ は同符号である。よって、(ii) の条件が満たされるのは $t = 1, 2$ に解をもつ場合のみである。

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 - 2at + 2 \\ &= (t - 1)(t - 2) \end{aligned}$$

なので、 $a = \frac{3}{2}$ のとき成り立つ。以上より、 $\sqrt{2} < a \leq \frac{3}{2}$ (答) $\sqrt{2} < a \leq \frac{3}{2}$

(1)



BE と CD の延長線の交点を H とおく。

$\triangle HDE$ と $\triangle BAE$ は合同なので、 $HD=BA$

さらに、 $\triangle HFG$ と $\triangle BAG$ は相似であることを用いると、

$$GH:GB=HF:BA=(t+1):1 \quad \cdots(\text{イ})$$

また、

$$HE:EB=1:1 \quad \cdots(\text{ロ})$$

(イ), (ロ)より、

$$GE:BG=\frac{t}{2}:1$$

よって

$$\frac{|\overline{GE}|}{|\overline{BG}|}=\frac{t}{2}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{t}{2}$$

(2)

(i)

$$\overline{AB}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{AC}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であり、

$$|\overline{AB}|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3, |\overline{AC}|=\sqrt{3}$$

したがって、 $\triangle ABC$ の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{AB}|^2 |\overline{AC}|^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{9 \cdot 3 - (-2-2+1)^2} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

(ii)

$$|\overline{BC}|=\sqrt{3^2+3^2+0^2}=3\sqrt{2}$$

$$\cos \angle CAB = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| |\overline{AC}|} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ より, } \sin \angle CAB = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

よって、正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin \angle CAB} = 3\sqrt{3} = 2R \quad (R \text{ は外接円の半径})$$

$$\text{なので, } R = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{AP} = \vec{p} = s\overline{AB} + t\overline{AC} \quad (s, t > 0)$$

$$\text{とおくと, } |\vec{p}| = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ より,}$$

$$|s\overline{AB} + t\overline{AC}|^2 = \frac{27}{4}$$

$$9s^2 - 6st + 3t^2 = \frac{27}{4}$$

$$12s^2 - 8st + 4t^2 = 9 \quad \cdots(\text{イ})$$

$$\text{さらに, } |\overline{CP}| = |s\overline{AB} + (t-1)\overline{AC}| = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ より,}$$

$$|s\overline{AB} + (t-1)\overline{AC}|^2 = \frac{27}{4}$$

$$9s^2 - 6s(t-1) + 3(t-1)^2 = \frac{27}{4}$$

$$12s^2 - 8st + 4t^2 + 8s - 8t = 5 \quad \cdots(\text{ロ})$$

(イ), (ロ)より、

$$9 + 8s - 8t = 5$$

$$s = t - \frac{1}{2}$$

これを(イ)に代入して、

$$12 \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - 8t \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right) + 4t^2 = 9$$

$$(2t-3)(2t+1)=0$$

$t > 0$ より、

$$t = \frac{3}{2}$$

このとき $s=1$ 。よって、

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \overline{AP} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

(1)

 $x^3 + ax^2 - a^2x = bx^2$ を整理すると、

$$x\{x^2 + (a-b)x - a^2\} = 0$$

である。 $x^2 + (a-b)x - a^2 = 0$ について、判別式を D とすると、

$$D = (a-b)^2 + 4a^2 > 0$$

なので、 $x^2 + (a-b)x - a^2 = 0$ は異なる 2 つの実数解を持つ。

さらに、 $x=0$ を代入すると $-a^2=0$ となり、これは条件 $a \neq 0$ より成り立たない。

つまり、 $x=0$ は $x^2 + (a-b)x - a^2 = 0$ の解ではないため、 $x\{x^2 + (a-b)x - a^2\} = 0$

は異なる 3 つの実数解を持つ。よって C_1 、 C_2 は 3 点で交わることが示された。

(証明終)

(2)

 $x^2 + (a-b)x - a^2 = 0$ の 2 解を α 、 β ($\alpha > \beta$) とする。

題意の条件は、

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(x) - g(x) dx = \int_{\beta}^{\alpha} (x^3 + ax^2 - a^2x - bx^2) dx = 0$$

と同値であるから、

$$\begin{aligned} \int_{\beta}^{\alpha} \{x^3 + (a-b)x^2 - a^2x\} dx &= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{a-b}{3}x^3 - \frac{a^2}{2}x^2 \right]_{\beta}^{\alpha} \\ &= \frac{1}{4}(\alpha^4 - \beta^4) + \frac{a-b}{3}(\alpha^3 - \beta^3) - \frac{a^2}{2}(\alpha^2 - \beta^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\alpha - \beta > 0$ より $\alpha - \beta$ で両辺割って、

$$\frac{1}{4}(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{a-b}{3}(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) - \frac{a^2}{2}(\alpha + \beta) = 0$$

ここで解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = -(a-b), \quad \alpha\beta = -a^2$$

なので、

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (a-b)^2 + 2a^2 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}(a-b)\{(a-b)^2 + 2a^2\} + \frac{a-b}{3}\{(a-b)^2 + a^2\} + \frac{a^2}{2}(a-b) &= 0 \\ \frac{1}{12}(a-b)^3 + \frac{a^2}{3}(a-b) &= 0 \end{aligned}$$

これを因数分解して、

$$(a-b)\{(a-b)^2 + 4a^2\} = 0$$

今 $(a-b)^2 + 4a^2 > 0$ なので、 $a-b=0$

よって $b=a$ となる。

(答) $b=a$

(3)

(2) のとき、

$$h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - a^2x$$

$$h'(x) = 3x^2 - a^2$$

なので、 $a \neq 0$ より $h(x)$ の増減表は次のようになる。

(i) $a > 0$ のとき

x	...	$-\frac{a}{\sqrt{3}}$	...	$\frac{a}{\sqrt{3}}$	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	↗		↘		↗

よって、極大値は $h\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$ 、極小値は $h\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$

(ii) $a < 0$ のとき

x	...	$\frac{a}{\sqrt{3}}$	...	$-\frac{a}{\sqrt{3}}$	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	↗		↘		↗

よって、極大値は $h\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$ 、極小値は $h\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$

(答) $a > 0$ のとき、極大値は $h\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$ 、極小値は $h\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$

$a < 0$ のとき、極大値は $h\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$ 、極小値は $h\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$