

1

(1)

三角関数の合成を用いて、

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{3} \sin x - \cos x \\ &= 2 \sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

となる。

$$-\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6}$$

と合わせて、求める  $t$  の範囲は

$$-1 \leq t \leq 2$$

(答)  $-1 \leq t \leq 2$ 

(2)

倍角の公式を用いて、

$$\begin{aligned} t^2 &= 3 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x \\ &= -\sqrt{3} \sin 2x + 1 + 2 \sin^2 x \\ &= -\sqrt{3} \sin 2x + 2 - \cos 2x \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} y &= -\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x - 2a \left( \sqrt{3} \sin x - \cos x \right) + 4 \\ &= t^2 - 2at + 2 \end{aligned}$$

(答)  $y = t^2 - 2at + 2$ 

(3)

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 - 2at + 2 \\ &= (t - a)^2 + 2 - a^2 \end{aligned}$$

とおく。 $-1 \leq t \leq 2$  において  $0 \leq y \leq 6$  となる条件を求めればよい。(i)  $a < -1$  のとき

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(-1) \text{ かつ } f(2) \leq 6 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq 2a + 3 \text{ かつ } -4a + 6 \leq 6 \\ \Leftrightarrow -\frac{3}{2} &\leq a \text{ かつ } 0 \leq a \end{aligned}$$

 $a < -1$  において、これを満たす  $a$  は存在しない。(ii)  $-1 \leq a < \frac{1}{2}$  のとき

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(a) \text{ かつ } f(2) \leq 6 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq 2 - a^2 \text{ かつ } -4a + 6 \leq 6 \\ \Leftrightarrow -\sqrt{2} &\leq a \leq \sqrt{2} \text{ かつ } 0 \leq a \end{aligned}$$

よって

$$0 \leq a < \frac{1}{2}$$

(iii)  $\frac{1}{2} \leq a < 2$  のとき

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(a) \text{ かつ } f(-1) \leq 6 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq 2 - a^2 \text{ かつ } 2a + 3 \leq 6 \\ \Leftrightarrow -\sqrt{2} &\leq a \leq \sqrt{2} \text{ かつ } a \leq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

よって

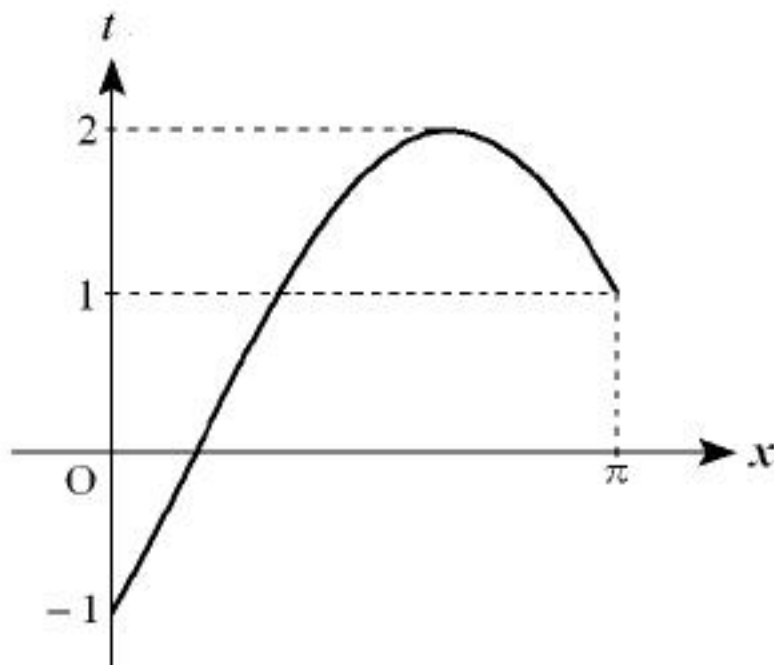
$$\frac{1}{2} \leq a \leq \sqrt{2}$$

(iv)  $2 \leq a$  のとき

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(2) \text{ かつ } f(-1) \leq 6 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq -4a + 6 \text{ かつ } 2a + 3 \leq 6 \\ \Leftrightarrow a &\leq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

 $2 \leq a$  において、これを満たす  $a$  は存在しない。以上より、 $0 \leq a \leq \sqrt{2}$ (答)  $0 \leq a \leq \sqrt{2}$ 

(4)

図より  $1 \leq t < 2$  の  $t$  に対しては異なる 2 つの  $x$  が対応し、 $-1 \leq t < 1$ ,  $t = 2$  の  $t$  に対しては 1 つの  $x$  が対応する。よって、 $-\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x - 2a(\sqrt{3} \sin x - \cos x) + 4 = 0$ が異なる 3 個以上の実数解を持つのは、 $f(t) = 0$  が、(i)  $1 \leq t < 2$  の異なる解を 2 つ持つとき

…(解が 4 つ)

(ii)  $1 \leq t < 2$  の解を 1 つと  $-1 \leq t < 1$ ,  $t = 2$  の解を 1 つ持つ

…(解が 3 つ)

のいずれかの場合である。

(i) のとき

軸の位置： $1 < a < 2$  $f(t) = 0$  の判別式： $\frac{D}{4} = a^2 - 2 > 0$ 境界条件： $\begin{cases} f(1) = -2a + 3 \geq 0 \\ f(2) = -4a + 6 > 0 \end{cases}$ 

であることから、以上の式をまとめて、

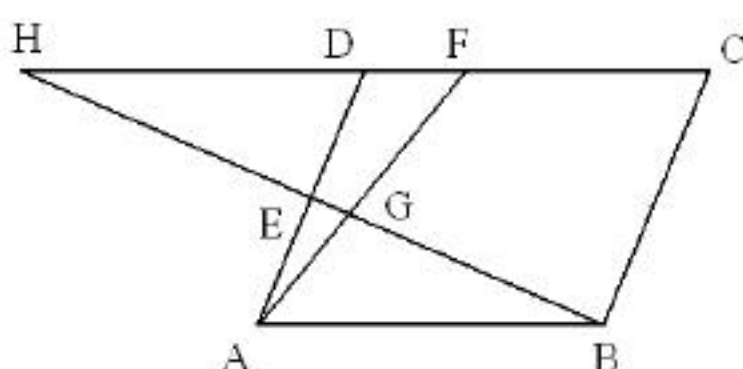
$$\sqrt{2} < a < \frac{3}{2}$$

ここで、 $f(2) = 2f(1)$  なので、 $f(1)$  と  $f(2)$  は同符号である。よって、(ii) の条件が満たされるのは  $t = 1, 2$  に解をもつ場合のみである。

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 - 2at + 2 \\ &= (t - 1)(t - 2) \end{aligned}$$

なので、 $a = \frac{3}{2}$  のとき成り立つ。以上より、 $\sqrt{2} < a \leq \frac{3}{2}$ (答)  $\sqrt{2} < a \leq \frac{3}{2}$

(1)



BE と CD の延長線の交点を H とおく。

$\triangle HDE$  と  $\triangle BAE$  は合同なので、 $HD=BA$

さらに、 $\triangle HFG$  と  $\triangle BAG$  は相似であることを用いると、

$$GH:GB=HF:BA=(t+1):1 \quad \cdots(\text{イ})$$

また、

$$HE:EB=1:1 \quad \cdots(\text{ロ})$$

(イ), (ロ)より、

$$GE:BG=\frac{t}{2}:1$$

よって

$$\frac{|\overline{GE}|}{|\overline{BG}|}=\frac{t}{2}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{t}{2}$$

(2)

(i)

$$\overline{AB}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{AC}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であり、

$$|\overline{AB}|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3, |\overline{AC}|=\sqrt{3}$$

したがって、 $\triangle ABC$  の面積を  $S$  とすると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{AB}|^2 |\overline{AC}|^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{9 \cdot 3 - (-2-2+1)^2} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

(ii)

$$|\overline{BC}|=\sqrt{3^2+3^2+0^2}=3\sqrt{2}$$

$$\cos \angle CAB = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| |\overline{AC}|} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ より, } \sin \angle CAB = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

よって、正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin \angle CAB} = 3\sqrt{3} = 2R \quad (R \text{ は外接円の半径})$$

$$\text{なので, } R = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{AP} = \vec{p} = s\overline{AB} + t\overline{AC} \quad (s, t > 0)$$

$$\text{とおくと, } |\vec{p}| = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ より,}$$

$$|s\overline{AB} + t\overline{AC}|^2 = \frac{27}{4}$$

$$9s^2 - 6st + 3t^2 = \frac{27}{4}$$

$$12s^2 - 8st + 4t^2 = 9 \quad \cdots(\text{イ})$$

$$\text{さらに, } |\overline{CP}| = |s\overline{AB} + (t-1)\overline{AC}| = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ より,}$$

$$|s\overline{AB} + (t-1)\overline{AC}|^2 = \frac{27}{4}$$

$$9s^2 - 6s(t-1) + 3(t-1)^2 = \frac{27}{4}$$

$$12s^2 - 8st + 4t^2 + 8s - 8t = 5 \quad \cdots(\text{ロ})$$

(イ), (ロ)より、

$$9 + 8s - 8t = 5$$

$$s = t - \frac{1}{2}$$

これを(イ)に代入して、

$$12 \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - 8t \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right) + 4t^2 = 9$$

$$(2t-3)(2t+1)=0$$

$t > 0$  より、

$$t = \frac{3}{2}$$

このとき  $s=1$ 。よって、

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \overline{AP} = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

(1)

$\int_0^1 f(t) dt$  は定数なので,

$$A = \int_0^1 f(t) dt$$

とおくと,  $f(x) = x^3 + 4A|x|$  であるから,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (t^3 + 4A|t|) dt \\ &= \int_0^1 (t^3 + 4At) dt \\ &= \left[ \frac{1}{4}t^4 + 2At^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} + 2A \end{aligned}$$

したがって,

$$A = -\frac{1}{4}$$

よって,

$$f(x) = x^3 - |x|$$

$$(\text{答}) \quad f(x) = x^3 - |x|$$

(2)

$x > 0$  から 0 に近づけたときの微分係数は, 微分係数の定義式から,

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{(0+h)^3 - (0+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} (h^2 - 1) = -1$$

同様にして,  $x < 0$  から 0 に近づけたとき, 微分係数は,

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{(0+h)^3 + (0+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} (h^2 + 1) = 1$$

以上より  $\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(h)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(h)}{h}$  なので,  $f(x)$  は  $x=0$  で微分可能ではない。

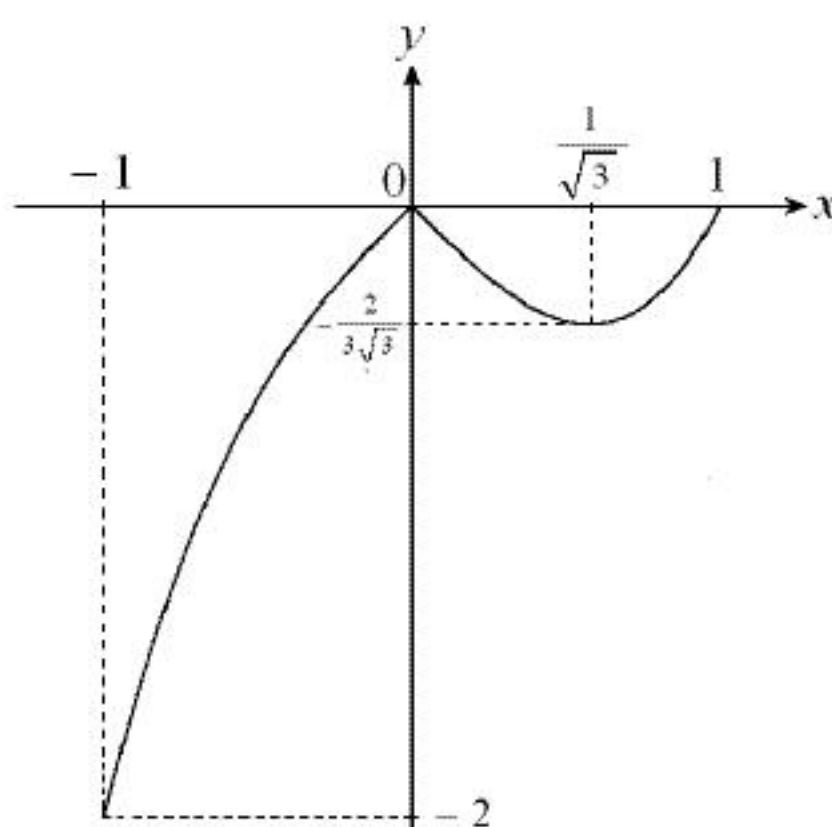
(証明終)

(3)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 1 \quad (0 < x \leq 1) \\ &= 3x^2 + 1 \quad (-1 < x \leq 0) \end{aligned}$$

なので,  $y = f(x)$  の増減表とグラフは次のようになる。

|         |    |            |          |            |                        |            |   |
|---------|----|------------|----------|------------|------------------------|------------|---|
| $x$     | -1 | ...        | 0        | ...        | $\frac{1}{\sqrt{3}}$   | ...        | 1 |
| $f'(x)$ | +  | +          | $\times$ | -          | 0                      | +          | + |
| $f(x)$  | -2 | $\nearrow$ | 0        | $\searrow$ | $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ | $\nearrow$ | 0 |



よって  $y = f(x)$  と  $y = a$  のグラフの交点の個数を考えて

(答)  $a < -2, 0 < a$  のとき 0 個

$-2 \leq a < -\frac{2\sqrt{3}}{9}$  のとき 1 個

$a = -\frac{2\sqrt{3}}{9}, 0$  のとき 2 個

$-\frac{2\sqrt{3}}{9} < a < 0$  のとき 3 個

(4)

$e^x$  を乗じても正負は変化しないので,  $f(x)$  と  $g(x)$  の正負は一致する。

よって求める面積  $S$  は,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{-g(x)\} dx \\ &= -\int_0^1 e^x (x^3 - x) dx \end{aligned}$$

ここで部分積分を用いると,

$$\begin{aligned} S &= -\left[ e^x \left\{ (x^3 - x) - (3x^2 - 1) + 6x - 6 \right\} \right]_0^1 \\ &= 2e - 5 \end{aligned}$$

(答)  $2e - 5$

(1)

行列  $A$  によって点  $(1, 2)$  が点  $(2, 1)$  に移るので

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

したがって、次式を得る。

$$\begin{cases} a - 2b = 2 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$$

これを解いて、

$$a = \frac{4}{5}, \quad b = -\frac{3}{5}$$

$$(\text{答}) \quad a = \frac{4}{5}, \quad b = -\frac{3}{5}$$

(2)

$P^{-1}$  が存在する条件は、

$$\det P = t - s \neq 0$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} P^{-1}BP &= \frac{1}{t-s} \begin{pmatrix} t & -1 \\ -s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ s & t \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{t-s} \begin{pmatrix} (t-s)c + (st-1)d & (t^2-1)d \\ (1-s^2)d & (t-s)c - (st-1)d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、これが対角行列になる条件は、

$$t^2 - 1 = 0 \text{ かつ } 1 - s^2 = 0$$

である。 ( $\because d \neq 0$ )

$t - s \neq 0$  より、

$$(s, t) = (\pm 1, \mp 1) \text{ (複号同順)}$$

$$(\text{答}) \quad (s, t) = (\pm 1, \mp 1) \text{ (複号同順)}$$

(3)

$$\begin{aligned} A^{-1}BA &= A^{-1}PP^{-1}BPP^{-1}A \\ &= A^{-1}P(P^{-1}BP)P^{-1}A \end{aligned}$$

と書ける。ここで、 $E$  を単位行列として、

$$(A^{-1}P)(P^{-1}A) = (P^{-1}A)(A^{-1}P) = E$$

となることから、 $C = P^{-1}A$  とすると、

$$C^{-1} = A^{-1}P$$

となる。また、 $s = -1, t = 1$  と選ぶと(2)より

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} c-d & 0 \\ 0 & c+d \end{pmatrix}$$

となるので、

$$\begin{aligned} (A^{-1}BA)^n &= \{C^{-1}(P^{-1}BP)C\}^n \\ &= C^{-1}(P^{-1}BP)^n C \\ &= C^{-1} \begin{pmatrix} (c-d)^n & 0 \\ 0 & (c+d)^n \end{pmatrix} C \end{aligned}$$

となる。 $C = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$  を用いて計算すると、

$$\begin{aligned} (A^{-1}BA)^n &= \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (c-d)^n & 0 \\ 0 & (c+d)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 49(c-d)^n + (c+d)^n & 7\{(c+d)^n - (c-d)^n\} \\ 7\{(c+d)^n - (c-d)^n\} & 49(c+d)^n + (c-d)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

この行列で  $(1, 2)$  を変換して、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 49(c-d)^n + (c+d)^n & 7\{(c+d)^n - (c-d)^n\} \\ 7\{(c+d)^n - (c-d)^n\} & 49(c+d)^n + (c-d)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3(c+d)^n + 7(c-d)^n \\ 21(c+d)^n - (c-d)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるため、 $n=1, c=0.2, d=0.5$  を代入して、

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{10} \{3(0.2+0.5) + 7(0.2-0.5)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって、題意は示された。

(証明終)

(4)

$c=d$  のとき、(3)より

$$\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = \frac{3}{10} \begin{pmatrix} (2c)^n \\ 7(2c)^n \end{pmatrix}$$

よって、

$$\frac{\beta_n}{\alpha_n} = 7$$

と常に一定の値となる。ゆえに、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_n}{\alpha_n} = 7$$

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_n}{\alpha_n} = 7$$

(5)

$c=0.2, d=0.8$  のとき、(3)より

$$\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 + 7(-0.6)^n \\ 21 - (-0.6)^n \end{pmatrix}$$

$|-0.6| < 1$  より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-0.6)^n = 0$$

なので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \frac{3}{10}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \frac{21}{10}$$

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \frac{3}{10}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \frac{21}{10}$$