

平成21年度
入学者選抜学力検査問題

環境・情報科学科
数 学

〔注 意〕

- 1 机上に受験票を提示しておくこと。
- 2 監督者の指示があるまで、この問題冊子を開いてはいけない。
- 3 解答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。
- 4 解答用紙に受験番号および氏名を必ず記入すること。
- 5 この問題冊子は表紙・裏表紙および余白を入れて8ページからなっている。
- 6 解答用紙は4枚ある。
- 7 下書き用紙は4枚ある。
- 8 この問題冊子のうち、落丁・乱丁および印刷不鮮明な箇所があれば、手をあげて申し出ること。
- 9 この問題の内容に関する質問には答えない。
- 10 試験開始後60分経過しないと退室できない。退室するときには、解答用紙を机上に置き、問題冊子、下書き用紙は持ち帰ること。

1 定数 a を実数とし, $0 \leq x \leq \pi$ とする. 関数 $y = -\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x - 2a(\sqrt{3} \sin x - \cos x) + 4$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $t = \sqrt{3} \sin x - \cos x$ とするとき, t の値の範囲を求めよ.

(2) y を t の式で表せ.

(3) $0 \leq y \leq 6$ が常に成り立つように, a の値の範囲を求めよ.

(4) 方程式 $-\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x - 2a(\sqrt{3} \sin x - \cos x) + 4 = 0$ が 3 個以上の異なる実数解をもつように, a の値の範囲を求めよ.

(配点 100 点)

2 以下の問いに答えよ.

(1) $0 < t < 1$ とする. 平行四辺形 ABCD において, 辺 AD の中点を E とし, 点 F は $\overrightarrow{DF} = t\overrightarrow{DC}$ を満たすものとする. 線分 AF, BE の交点を G とするとき, $\frac{|\overrightarrow{GE}|}{|\overrightarrow{BG}|}$ を t を用いて表せ.

(2) xyz 空間内に 3 点 A(1, 2, 1), B(3, 4, 2), C(0, 1, 2) をとる. 三角形 ABC の外心を P とする.

(i) 三角形 ABC の面積を求めよ.

(ii) $\overrightarrow{AP}$ の成分を求めよ.

(配点 100 点)

- 3** e は自然対数の底とし，定数 a を実数とする．関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ を $-1 \leq x \leq 1$ の範囲で定義された連続関数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) = x^3 + 4|x| \int_0^1 f(t)dt$ を満たす $f(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能でないことを示せ．

(3) 曲線 $C_1 : y = f(x)$ と直線 $\ell : y = a$ との $-1 \leq x \leq 1$ の範囲における共有点の個数を， a の値によって分類せよ．

(4) $g(x) = e^x f(x)$ とする．曲線 $C_2 : y = g(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

(配点 100 点)

4 定数 a, b, c, d, s, t を実数, n を自然数とする. ただし, $c \neq 0$ かつ $d \neq 0$ とする. 行列 A, B, P を $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ s & t \end{pmatrix}$ とし, A の逆行列を A^{-1} , P の逆行列を P^{-1} とする. 行列 A で表される移動によって点 $(1, 2)$ が点 $(2, 1)$ に移り, 行列 $(A^{-1}BA)^n$ で表される移動によって点 $(1, 2)$ が点 (α_n, β_n) に移るとする. 以下の問いに答えよ.

(1) a と b の値を求めよ.

(2) P^{-1} が存在し, かつ, $P^{-1}BP$ が対角行列となるように, s と t の値を求めよ.

(3) $c = 0.2$ かつ $d = 0.5$ のとき, $\alpha_1 = 0$ となることを示せ.

(4) $c = d$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_n}{\alpha_n}$ を求めよ.

(5) $c = 0.2$ かつ $d = 0.8$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$ を求めよ.

(配点 100 点)