

1

(1)

$\sqrt{5}$ が無理数であることを背理法を用いて証明する。 $\sqrt{5}$ が有理数であると仮定すると、互いに素である自然数 m, n を用いて

$$\sqrt{5} = \frac{n}{m}$$

と表される。このとき

$$5m^2 = n^2$$

となるが、 m, n が互いに素である自然数であることから n^2 は 5 の倍数となり、このとき n は 5 の倍数である。よって、自然数 N を用いて

$$n = 5N$$

と表され、これより

$$5m^2 = 25N^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 5N^2$$

となるから、同様にして m も 5 の倍数となる。しかし、これは m, n が互いに素である自然数であることに矛盾するから、仮定は誤りであり、 $\sqrt{5}$ は無理数であることが示された。

(証明終)

(2)

α が 2 次方程式 $x^2 - 4x - 1 = 0$ の解であるとき

$$\alpha^2 - 4\alpha - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = 4\alpha + 1$$

が成り立つから

$$(\alpha - a)(\alpha - b) = 1 + c$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - (a + b)\alpha + ab = 1 + c$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha + 1 - (a + b)\alpha + ab = 1 + c$$

$$\Leftrightarrow (4 - a - b)\alpha + ab - c = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。ここで

$$\alpha^2 - 4\alpha - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2 \pm \sqrt{5}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ より

$$(4 - a - b)(2 \pm \sqrt{5}) + ab - c = 0$$

$$\Leftrightarrow (8 - 2a - 2b + ab - c) \pm \sqrt{5}(4 - a - b) = 0$$

となる。(1)の結果を用いて $\sqrt{5}$ は無理数であり、また a, b, c が自然数であるとき

$8 - 2a - 2b + ab - c, 4 - a - b$ は有理数であるから

$$\begin{cases} 8 - 2a - 2b + ab - c = 0 \\ 4 - a - b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ c = ab \end{cases}$$

が成り立つ。 $a + b = 4$ を満たす自然数の組 (a, b) は

$$(a, b) = (1, 3), (2, 2), (3, 1)$$

であるから、それぞれの場合において $c = ab$ を満たす c の値を求めると

$$(a, b, c) = (1, 3, 3), (2, 2, 4), (3, 1, 3)$$

となる。

(答) $(a, b, c) = (1, 3, 3), (2, 2, 4), (3, 1, 3)$

(3)

(i)

k は整数であるから $3k^2 - 12k - 3$ も整数である。また、 $k^2 - 4k - 1 < 0$ を満たすとき

$$\begin{aligned} 3k^2 - 12k - 3 &= 3(k^2 - 4k - 1) \\ &< 0 \end{aligned}$$

であるから、 N_k は直線 ℓ 上の $0 \leq y \leq 3k^2 - 12k - 3$ に存在する格子点の個数にあたるから

$$\begin{aligned} N_k &= 0 - (3k^2 - 12k - 3) + 1 \\ &= -3k^2 + 12k + 4 \end{aligned}$$

である。

(答) $N_k = -3k^2 + 12k + 4$

(ii)

$$k^2 - 4k - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{5} < k < 2 + \sqrt{5}$$

であり、 $2 < \sqrt{5} < 3$ であるから、 $k^2 - 4k - 1 < 0$ を満たす整数 k の値は $k = 0, 1, 2, 3, 4$ である。よって、 D に含まれる格子点の総数は

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^4 N_k &= \sum_{k=0}^4 (-3k^2 + 12k + 4) \\ &= -3 \cdot \frac{4 \cdot (4+1) \cdot (2 \cdot 4 + 1)}{6} + 12 \cdot \frac{4 \cdot (4+1)}{2} + 4 \cdot (4+1) \\ &= 50 \end{aligned}$$

より 50 個である。

(答) 50 個

2

(1)

ベクトル方程式 $(\vec{p} - k\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{p} + 3\vec{b}) = 0$ で表される円 K は $k\vec{a} + \vec{b}, -3\vec{b}$ を位置ベクトルとする

2点(これらをそれぞれ E, F とおく)を直径の両端とする円である。よって, K の中心 $C(\vec{c})$ は

線分 EF の中点であるから

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \frac{(k\vec{a} + \vec{b}) + (-3\vec{b})}{2} \\ &= \frac{k}{2}\vec{a} - \vec{b}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \vec{c} = \frac{k}{2}\vec{a} - \vec{b}$$

(2)

$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$ であるとき

$$\begin{aligned}|\vec{a} - \vec{b}|^2 &= 3 \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 &= 3 \\ \Leftrightarrow 2^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 1^2 &= 3 \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= 1\end{aligned}$$

である。よって, K の半径が $\sqrt{3}$ となるとき

$$\begin{aligned}|\vec{c} - (-3\vec{b})| &= \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \left| \frac{k}{2}\vec{a} + 2\vec{b} \right| &= \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} |k\vec{a} + 4\vec{b}|^2 &= 3 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} (k^2 |\vec{a}|^2 + 8k\vec{a} \cdot \vec{b} + 16|\vec{b}|^2) &= 3 \\ \Leftrightarrow k^2 + 2k + 4 &= 3 \\ \Leftrightarrow (k+1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= -1\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad k = -1$$

(3)

点 $H(\vec{h})$ は ℓ 上の点であるから, 実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\vec{h} &= \vec{d} + t\vec{a} \\ &= t\vec{a} + 4\vec{b}\end{aligned}$$

と表わされる。また, $\overline{CH} \perp \ell$ であるから, ℓ の方向ベクトルが $\vec{a}$ であることより

$$\begin{aligned}\overline{CH} \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ (t\vec{a} + 4\vec{b}) - \left(\frac{k}{2}\vec{a} - \vec{b} \right) \right\} \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ \left(t - \frac{k}{2} \right) \vec{a} + 5\vec{b} \right\} \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(t - \frac{k}{2} \right) |\vec{a}|^2 + 5\vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4 \left(t - \frac{k}{2} \right) + 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{k}{2} - \frac{5}{4}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\vec{h} = \left(\frac{k}{2} - \frac{5}{4} \right) \vec{a} + 4\vec{b}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \vec{h} = \left(\frac{k}{2} - \frac{5}{4} \right) \vec{a} + 4\vec{b}$$

(4)

円 K の中心 C と ℓ の距離は CH に等しく

$$\begin{aligned}|\overline{CH}|^2 &= \left| -\frac{5}{4}\vec{a} + 5\vec{b} \right|^2 \\ &= \frac{25}{16} |\vec{a}|^2 - \frac{25}{2} \vec{a} \cdot \vec{b} + 25 |\vec{b}|^2 \\ &= \frac{75}{4}\end{aligned}$$

である。(2)の過程より, K の半径は $\sqrt{k^2 + 2k + 4}$ であるから, ℓ が K と共有点をもつとき

$$\begin{aligned}\sqrt{k^2 + 2k + 4} &\geq |\overline{CH}| \\ \Leftrightarrow k^2 + 2k + 4 &\geq \frac{75}{4} \left(\because \sqrt{k^2 + 2k + 4} > 0, |\overline{CH}| > 0 \right) \\ \Leftrightarrow 4k^2 + 8k - 59 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow k &\leq \frac{-2 - 3\sqrt{7}}{2}, \frac{-2 + 3\sqrt{7}}{2} \leq k\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad k \leq \frac{-2 - 3\sqrt{7}}{2}, \frac{-2 + 3\sqrt{7}}{2} \leq k$$

3

(1)

$$f(x) = ax^2 \text{ とおくと}$$

$$f'(x) = 2ax$$

であり、 $t > 0$ のとき $f'(t) > 0$ であるから、放物線 $C: y = f(x)$ 上の点 $P(t, f(t))$ ($t > 0$) における法線 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{f'(t)}(x-t) + f(t) \\ &= -\frac{1}{2at}x + at^2 + \frac{1}{2a} \end{aligned}$$

である。よって、 C, ℓ の交点の x 座標は

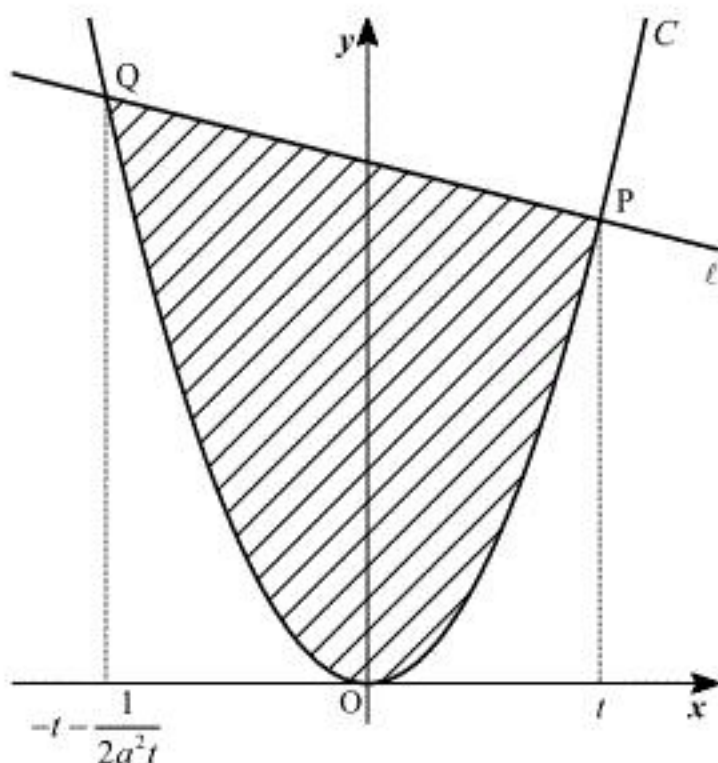
$$\begin{aligned} ax^2 &= -\frac{1}{2at}x + at^2 + \frac{1}{2a} \\ \Leftrightarrow a(x-t)(x+t) + \frac{1}{2at}(x-t) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-t)(2a^2tx + 2a^2t^2 + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = t, -t - \frac{1}{2a^2t} \end{aligned}$$

となり、このうち t でない方が点 Q の x 座標であるから $-t - \frac{1}{2a^2t}$ である。

$$(\text{答}) \quad -t - \frac{1}{2a^2t}$$

(2)

C, ℓ で囲まれた部分は下図の斜線部である。



ここで、点 Q の x 座標を $s = -t - \frac{1}{2a^2t}$ とおくと、 $a > 0, t > 0$ より求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_s^t \left\{ \left(-\frac{1}{2at}x + at^2 + \frac{1}{2a} \right) - ax^2 \right\} dx \\ &= -a \int_s^t (x-s)(x-t) dx \\ &= \frac{a}{6}(t-s)^3 \\ &= \frac{a}{6} \left(2t + \frac{1}{2a^2t} \right)^3 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{a}{6} \left(2t + \frac{1}{2a^2t} \right)^3$$

(3)

$$S = \frac{a}{6} \left(2t + \frac{1}{2a^2t} \right)^3, \quad a > 0, 2t + \frac{1}{2a^2t} > 0 \text{ より, } 2t + \frac{1}{2a^2t} \text{ が最小となるとき } S \text{ も最小となる。}$$

$a > 0, t > 0$ であるから、相加平均・相乗平均の大小関係より

$$\begin{aligned} 2t + \frac{1}{2a^2t} &\geq 2\sqrt{2t \cdot \frac{1}{2a^2t}} \\ &= \frac{2}{a} \end{aligned}$$

となり、等号成立は

$$\begin{aligned} 2t &= \frac{1}{2a^2t} \\ \Leftrightarrow t &= \frac{1}{2a} \quad (\because a > 0, t > 0) \end{aligned}$$

のときである。以上より、 S が最小となるときの t の値は $t = \frac{1}{2a}$ である。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{1}{2a}$$