

1

(1)

$\sqrt{5}$ が無理数であることを背理法を用いて証明する。 $\sqrt{5}$ が有理数であると仮定すると、互いに素である自然数 m, n を用いて

$$\sqrt{5} = \frac{n}{m}$$

と表される。このとき

$$5m^2 = n^2$$

となるが、 m, n が互いに素である自然数であることから n^2 は 5 の倍数となり、このとき n は 5 の倍数である。よって、自然数 N を用いて

$$n = 5N$$

と表され、これより

$$5m^2 = 25N^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 5N^2$$

となるから、同様にして m も 5 の倍数となる。しかし、これは m, n が互いに素である自然数であることに矛盾するから、仮定は誤りであり、 $\sqrt{5}$ は無理数であることが示された。

(証明終)

(2)

α が 2 次方程式 $x^2 - 4x - 1 = 0$ の解であるとき

$$\alpha^2 - 4\alpha - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = 4\alpha + 1$$

が成り立つから

$$(\alpha - a)(\alpha - b) = 1 + c$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - (a + b)\alpha + ab = 1 + c$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha + 1 - (a + b)\alpha + ab = 1 + c$$

$$\Leftrightarrow (4 - a - b)\alpha + ab - c = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。ここで

$$\alpha^2 - 4\alpha - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2 \pm \sqrt{5}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ より

$$(4 - a - b)(2 \pm \sqrt{5}) + ab - c = 0$$

$$\Leftrightarrow (8 - 2a - 2b + ab - c) \pm \sqrt{5}(4 - a - b) = 0$$

となる。(1)の結果を用いて $\sqrt{5}$ は無理数であり、また a, b, c が自然数であるとき

$8 - 2a - 2b + ab - c, 4 - a - b$ は有理数であるから

$$\begin{cases} 8 - 2a - 2b + ab - c = 0 \\ 4 - a - b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ c = ab \end{cases}$$

が成り立つ。 $a + b = 4$ を満たす自然数の組 (a, b) は

$$(a, b) = (1, 3), (2, 2), (3, 1)$$

であるから、それぞれの場合において $c = ab$ を満たす c の値を求めると

$$(a, b, c) = (1, 3, 3), (2, 2, 4), (3, 1, 3)$$

となる。

(答) $(a, b, c) = (1, 3, 3), (2, 2, 4), (3, 1, 3)$

(3)

(i)

k は整数であるから $3k^2 - 12k - 3$ も整数である。また、 $k^2 - 4k - 1 < 0$ を満たすとき

$$\begin{aligned} 3k^2 - 12k - 3 &= 3(k^2 - 4k - 1) \\ &< 0 \end{aligned}$$

であるから、 N_k は直線 ℓ 上の $0 \geq y \geq 3k^2 - 12k - 3$ に存在する格子点の個数にあたるから

$$\begin{aligned} N_k &= 0 - (3k^2 - 12k - 3) + 1 \\ &= -3k^2 + 12k + 4 \end{aligned}$$

である。

(答) $N_k = -3k^2 + 12k + 4$

(ii)

$$k^2 - 4k - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{5} < k < 2 + \sqrt{5}$$

であり、 $2 < \sqrt{5} < 3$ であるから、 $k^2 - 4k - 1 < 0$ を満たす整数 k の値は $k = 0, 1, 2, 3, 4$ である。よって、 D に含まれる格子点の総数は

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^4 N_k &= \sum_{k=0}^4 (-3k^2 + 12k + 4) \\ &= -3 \cdot \frac{4 \cdot (4+1) \cdot (2 \cdot 4 + 1)}{6} + 12 \cdot \frac{4 \cdot (4+1)}{2} + 4 \cdot (4+1) \\ &= 50 \end{aligned}$$

より 50 個である。

(答) 50 個

2

(1)

ベクトル方程式 $(\vec{p} - k\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{p} + 3\vec{b}) = 0$ で表される円 K は $k\vec{a} + \vec{b}, -3\vec{b}$ を位置ベクトルとする

2点(これらをそれぞれ E, F とおく)を直径の両端とする円である。よって, K の中心 $C(\vec{c})$ は

線分 EF の中点であるから

$$\begin{aligned}\vec{c} &= \frac{(k\vec{a} + \vec{b}) + (-3\vec{b})}{2} \\ &= \frac{k}{2}\vec{a} - \vec{b}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \vec{c} = \frac{k}{2}\vec{a} - \vec{b}$$

(2)

$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$ であるとき

$$\begin{aligned}|\vec{a} - \vec{b}|^2 &= 3 \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 &= 3 \\ \Leftrightarrow 2^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 1^2 &= 3 \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= 1\end{aligned}$$

である。よって, K の半径が $\sqrt{3}$ となるとき

$$\begin{aligned}|\vec{c} - (-3\vec{b})| &= \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \left| \frac{k}{2}\vec{a} + 2\vec{b} \right| &= \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} |k\vec{a} + 4\vec{b}|^2 &= 3 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} (k^2 |\vec{a}|^2 + 8k\vec{a} \cdot \vec{b} + 16|\vec{b}|^2) &= 3 \\ \Leftrightarrow k^2 + 2k + 4 &= 3 \\ \Leftrightarrow (k+1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= -1\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad k = -1$$

(3)

点 $H(\vec{h})$ は ℓ 上の点であるから, 実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\vec{h} &= \vec{d} + t\vec{a} \\ &= t\vec{a} + 4\vec{b}\end{aligned}$$

と表わされる。また, $\overline{CH} \perp \ell$ であるから, ℓ の方向ベクトルが $\vec{a}$ であることより

$$\begin{aligned}\overline{CH} \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ (t\vec{a} + 4\vec{b}) - \left(\frac{k}{2}\vec{a} - \vec{b} \right) \right\} \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ \left(t - \frac{k}{2} \right) \vec{a} + 5\vec{b} \right\} \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(t - \frac{k}{2} \right) |\vec{a}|^2 + 5\vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4 \left(t - \frac{k}{2} \right) + 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{k}{2} - \frac{5}{4}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\vec{h} = \left(\frac{k}{2} - \frac{5}{4} \right) \vec{a} + 4\vec{b}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \vec{h} = \left(\frac{k}{2} - \frac{5}{4} \right) \vec{a} + 4\vec{b}$$

(4)

円 K の中心 C と ℓ の距離は CH に等しく

$$\begin{aligned}|\overline{CH}|^2 &= \left| -\frac{5}{4}\vec{a} + 5\vec{b} \right|^2 \\ &= \frac{25}{16} |\vec{a}|^2 - \frac{25}{2} \vec{a} \cdot \vec{b} + 25 |\vec{b}|^2 \\ &= \frac{75}{4}\end{aligned}$$

である。(2)の過程より, K の半径は $\sqrt{k^2 + 2k + 4}$ であるから, ℓ が K と共有点をもつとき

$$\begin{aligned}\sqrt{k^2 + 2k + 4} &\geq |\overline{CH}| \\ \Leftrightarrow k^2 + 2k + 4 &\geq \frac{75}{4} \left(\because \sqrt{k^2 + 2k + 4} > 0, |\overline{CH}| > 0 \right) \\ \Leftrightarrow 4k^2 + 8k - 59 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow k &\leq \frac{-2 - 3\sqrt{7}}{2}, \frac{-2 + 3\sqrt{7}}{2} \leq k\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad k \leq \frac{-2 - 3\sqrt{7}}{2}, \frac{-2 + 3\sqrt{7}}{2} \leq k$$

[3]

(1)

$f(x) = \int_0^{\pi} |t^2 - x^2| \sin t dt$ について

$$\begin{aligned} f(0) &= \int_0^{\pi} t^2 \sin t dt \\ &= \left[-t^2 \cos t \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2t \cos t dt \\ &= \pi^2 + \left[2t \sin t \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2 \sin t dt \\ &= \pi^2 + \left[2 \cos t \right]_0^{\pi} \\ &= \pi^2 - 4 \end{aligned}$$

となる。

(答) $f(0) = \pi^2 - 4$

(2)

$$\begin{aligned} \int (t^2 - a^2) \sin t dt &= -(t^2 - a^2) \cos t + \int 2t \cos t dt \\ &= -(t^2 - a^2) \cos t + 2t \sin t - \int 2 \sin t dt \\ &= -(t^2 - a^2) \cos t + 2t \sin t + 2 \cos t + C \end{aligned}$$

となる。ただし、 C は積分定数である。

[1] $|a| < \pi$ のとき

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_0^{\pi} |t^2 - x^2| \sin t dt \\ &= -\int_0^{|a|} (t^2 - a^2) \sin t dt + \int_{|a|}^{\pi} (t^2 - a^2) \sin t dt \\ &= -\left[-(t^2 - a^2) \cos t + 2t \sin t + 2 \cos t \right]_0^{|a|} + \left[-(t^2 - a^2) \cos t + 2t \sin t + 2 \cos t \right]_{|a|}^{\pi} \\ &= \pi^2 - 4|a| \sin |a| - 4 \cos |a| \end{aligned}$$

となり、 $a < 0$ のとき

$$\begin{aligned} |a| \sin |a| &= -a \sin(-a) \\ &= a \sin a \\ \cos |a| &= \cos(-a) \\ &= \cos a \end{aligned}$$

であるから、 a の正負に関わらず

$$f(a) = \pi^2 - 4a \sin a - 4 \cos a$$

である。

[2] $|a| \geq \pi$ のとき

$$\begin{aligned} f(a) &= -\int_0^{\pi} (t^2 - a^2) \sin t dt \\ &= -\left[-(t^2 - a^2) \cos t + 2t \sin t + 2 \cos t \right]_0^{\pi} \\ &= 2a^2 - \pi^2 + 4 \end{aligned}$$

である。

以上、[1], [2]より

$$f(a) = \begin{cases} \pi^2 - 4a \sin a - 4 \cos a & (|a| < \pi \text{ のとき}) \\ 2a^2 - \pi^2 + 4 & (|a| \geq \pi \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。

$$(答) \quad f(a) = \begin{cases} \pi^2 - 4a \sin a - 4 \cos a & (|a| < \pi \text{ のとき}) \\ 2a^2 - \pi^2 + 4 & (|a| \geq \pi \text{ のとき}) \end{cases}$$

(3)

(2)の結果を用いて

$$\lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x) = \pi^2 + 4, \quad \lim_{x \rightarrow \pi+0} f(x) = \pi^2 + 4, \quad f(\pi) = \pi^2 + 4$$

より

$$\lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi+0} f(x) = f(\pi)$$

であるから、 $f(x)$ は $x = \pi$ で連続である。また、(2)の結果を用いて、 $|x| < \pi$ のとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4 \sin x - 4x \cos x + 4 \sin x \\ &= -4x \cos x \end{aligned}$$

となり、 $|x| > \pi$ のとき

$$f'(x) = 4x$$

となる。よって

$$\lim_{x \rightarrow \pi-0} f'(x) = 4\pi, \quad \lim_{x \rightarrow \pi+0} f'(x) = 4\pi$$

より

$$\lim_{x \rightarrow \pi-0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \pi+0} f'(x)$$

であるから、 $f(x)$ は $x = \pi$ で微分可能であることが示された。

(証明終)

(4)

(3)の結果を用いて

$$\begin{aligned} f(\pi) &= \pi^2 + 4 \\ f'(\pi) &= 4\pi \end{aligned}$$

であるから、点 $(\pi, f(\pi))$ における曲線 $C: y = f(x)$ の接線 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(\pi)(x - \pi) + f(\pi) \\ &= 4\pi(x - \pi) + \pi^2 + 4 \\ &= 4\pi x - 3\pi^2 + 4 \end{aligned}$$

となる。

[1] $0 < x < \pi$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) - (4\pi x - 3\pi^2 + 4) &= \pi^2 - 4x \sin x - 4 \cos x - (4\pi x - 3\pi^2 + 4) \\ &= 4(-x \sin x - \cos x - \pi x + \pi^2 - 1) \end{aligned}$$

となる。 $g(x) = -x \sin x - \cos x - \pi x + \pi^2 - 1$ とおくと

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\sin x - x \cos x + \sin x - \pi \\ &= -x \cos x - \pi \end{aligned}$$

となり、 $0 < x < \pi$ のとき

$$\begin{aligned} -1 &< \cos x < 1 \\ \Leftrightarrow -x &< x \cos x < x \quad (\because x > 0) \end{aligned}$$

であり、また

$$-\pi < -x < 0$$

であるから

$$\begin{aligned} -\pi &< x \cos x \\ \Leftrightarrow -x \cos x - \pi &< 0 \\ \Leftrightarrow g'(x) &< 0 \end{aligned}$$

となる。よって、 $g(x)$ は単調減少関数であり $g(\pi) = 0$ であることから

$$\begin{aligned} g(x) &> 0 \\ \Leftrightarrow f(x) &> 4\pi x - 3\pi^2 + 4 \end{aligned}$$

である。

[2] $\pi \leq x$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) - (4\pi x - 3\pi^2 + 4) &= 2x^2 - \pi^2 + 4 - (4\pi x - 3\pi^2 + 4) \\ &= 2(x^2 - 2\pi x + \pi^2) \\ &= 2(x - \pi)^2 \end{aligned}$$

より

$$f(x) - (4\pi x - 3\pi^2 + 4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq 4\pi x - 3\pi^2 + 4$$

となる。

以上、[1], [2]より、 C, ℓ, y 軸で囲まれた部分の面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \{f(x) - (4\pi x - 3\pi^2 + 4)\} dx &= \int_0^{\pi} \left\{ \pi^2 - 4(x \sin x + \cos x) \right\} - (4\pi x - 3\pi^2 + 4) dx \\ &= -4 \int_0^{\pi} (x \sin x + \cos x + \pi x + 1 - \pi^2) dx \\ &= -4 \left\{ \left[-x \cos x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx \right\} + \int_0^{\pi} (\cos x + \pi x + 1 - \pi^2) dx \\ &= -4\pi - 4 \left[\sin x \right]_0^{\pi} - 4 \left[\sin x + \frac{\pi}{2} x^2 + (1 - \pi^2)x \right]_0^{\pi} \\ &= 2\pi^3 - 8\pi \end{aligned}$$

である。

(答) $2\pi^3 - 8\pi$

4

(1)

$a_1=1, a_{n+1}-a_n=2^n (n=1, 2, \dots)$ であるから、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \\ &= 1 + \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

となり、 $n=1$ のとき $a_1=1$ を満たすから

$$a_n = 2^n - 1 (n=1, 2, \dots)$$

である。よって

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \sum_{k=1}^n (2^k - 1) \\ &= \frac{2(2^n - 1)}{2-1} - n \\ &= 2^{n+1} - n - 2 \end{aligned}$$

である。

(答) $b_n = 2^{n+1} - n - 2$

(2)

$$\begin{aligned} \sqrt{2}A^2 &= (1+\sqrt{3})A - \sqrt{2}E \\ \Leftrightarrow -A^2 + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}A &= E \\ \Leftrightarrow A \left(-A + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}E \right) &= E \end{aligned}$$

となるから、 A は逆行列として

$$A^{-1} = -A + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}E$$

をもつことが示された。

(証明終)

(3)

(1)の結果を用いて $b_1=1$ となるから

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= A^{b_1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であり

$$A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

である。また

$$\begin{aligned} \sqrt{2}A^2 &= (1+\sqrt{3})A - \sqrt{2}E \\ \Leftrightarrow A^2 &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}A - E \end{aligned}$$

であるから

$$A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}A - E \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \textcircled{2}$$

となる。①、②より

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} &= \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}A - E \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるから

$$A \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

であるから、 $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ は逆行列をもち

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{12} &= \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{\pi}{12} &= \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

であるから

$$A = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{12} & -\sin \frac{\pi}{12} \\ \sin \frac{\pi}{12} & \cos \frac{\pi}{12} \end{pmatrix}$$

となり、行列 A は原点まわりに $\frac{\pi}{12}$ だけ回転する一次変換を表す。よって、自然数 m に対して

$$A^m = \begin{pmatrix} \cos \frac{m\pi}{12} & -\sin \frac{m\pi}{12} \\ \sin \frac{m\pi}{12} & \cos \frac{m\pi}{12} \end{pmatrix}$$

となる。(1)の結果を用いて $b_2=4$ であるから

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} &= A^{b_2} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= A^4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

(答) $x_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}, y_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

(4)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow A^{b_n} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるとき、(3)の結果を用いて原点まわりに $\frac{b_n\pi}{12}$ だけ回転する一次変換が恒等変換となる。

つまり、整数 k を用いて

$$\begin{aligned} \frac{b_n\pi}{12} &= 2k\pi \\ \Leftrightarrow b_n &= 24k \end{aligned}$$

となる。(1)の結果を用いて

$$b_1=1, b_2=4, b_3=11, b_4=26, b_5=57, b_6=120, \dots$$

であるから、 $b_n=24k$ を満たす最小の自然数 n は $n=6$ となる。

(答) $n=6$