

平成 22 年度 前期日程
入学者選抜学力検査問題

生 命 分 子 化 学 科
数 学

〔注 意〕

- 1 机上に受験票を提示しておくこと。
- 2 監督者の指示があるまで、この問題冊子を開いてはいけない。
- 3 解答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。
- 4 解答用紙に受験番号および氏名を必ず記入すること。
- 5 この冊子の問題は余白を入れて 4 ページからなっている。
- 6 解答用紙は 3 枚ある。
- 7 下書き用紙は 3 枚ある。
- 8 この問題冊子のうち、落丁・乱丁および印刷不鮮明な箇所があれば、手をあげて申し出ること。
- 9 この問題の内容に関する質問には答えない。
- 10 試験開始後 60 分経過しないと退室できない。退室するときには、解答用紙を机上に置き、問題冊子、下書き用紙は持ち帰ること。

1 以下の問いに答えよ.

(1) $\sqrt{5}$ が無理数であることを証明せよ.

(2) α を 2 次方程式 $x^2 - 4x - 1 = 0$ の解とすると、 $(\alpha - a)(\alpha - b) = 1 + c$ を満たす自然数の組 (a, b, c) をすべて求めよ.

(3) 座標平面上の点 (s, t) で s と t のどちらも整数となるものを格子点と呼ぶ. 連立不等式

$$\begin{cases} y \geq 3x^2 - 12x - 3 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

の表す領域を D とする. $k^2 - 4k - 1 < 0$ を満たす整数 k に対して、直線 $\ell: x = k$ 上にあり、かつ、 D に含まれる格子点の個数を N_k とする.

(i) N_k を k を用いて多項式で表せ.

(ii) D に含まれる格子点の総数を求めよ.

(配点 70 点)

- 2 定数 k を実数とする. 座標平面上に 4 つの定点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$, $D(\vec{d})$ がある. $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$ とし, $\vec{d} = 4\vec{b}$ とする. このとき, C を中心とする円 K 上の任意の点を $P(\vec{p})$ とし, K はベクトル方程式

$$(\vec{p} - k\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{p} + 3\vec{b}) = 0$$

で表されるとき. また, D を通り, $\vec{a}$ に平行な直線を ℓ とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) $\vec{c}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, k を用いて表せ.
- (2) K の半径が $\sqrt{3}$ となる k の値を求めよ.
- (3) C から ℓ に下ろした垂線の足を H とする. H の位置ベクトル $\vec{h}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, k を用いて表せ.
- (4) ℓ が, K と共有点をもつとするとき, k のとり得る値の範囲を求めよ.

(配点 60 点)

3 定数 a を正の実数とする. 放物線 $C: y = ax^2$ 上の点 P の x 座標を t とする. P における C の法線を ℓ とし, C と ℓ で囲まれた部分の面積を S とする. ただし, $t > 0$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) C と ℓ の P 以外の交点を Q とする. Q の x 座標を a, t を用いて表せ.

(2) S を a, t を用いて表せ.

(3) S が最小となるときの t を a を用いて表せ.

(配点 70 点)

(余 白)