

平成22年度 前期日程
入学者選抜学力検査問題

環境・情報科学科
数 学

〔注 意〕

- 1 机上に受験票を提示しておくこと。
- 2 監督者の指示があるまで、この問題冊子を開いてはいけない。
- 3 解答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。
- 4 解答用紙に受験番号および氏名を必ず記入すること。
- 5 この冊子の問題は4ページからなっている。
- 6 解答用紙は4枚ある。
- 7 下書き用紙は4枚ある。
- 8 この問題冊子のうち、落丁・乱丁および印刷不鮮明な箇所があれば、手をあげて申し出ること。
- 9 この問題の内容に関する質問には答えない。
- 10 試験開始後60分経過しないと退室できない。退室するときには、解答用紙を机上に置き、問題冊子、下書き用紙は持ち帰ること。

1 以下の問いに答えよ.

(1) $\sqrt{5}$ が無理数であることを証明せよ.

(2) α を 2 次方程式 $x^2 - 4x - 1 = 0$ の解とすると、 $(\alpha - a)(\alpha - b) = 1 + c$ を満たす自然数の組 (a, b, c) をすべて求めよ.

(3) 座標平面上の点 (s, t) で s と t のどちらも整数となるものを格子点と呼ぶ. 連立不等式

$$\begin{cases} y \geq 3x^2 - 12x - 3 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

の表す領域を D とする. $k^2 - 4k - 1 < 0$ を満たす整数 k に対して, 直線 $\ell: x = k$ 上にあり, かつ, D に含まれる格子点の個数を N_k とする.

(i) N_k を k を用いて多項式で表せ.

(ii) D に含まれる格子点の総数を求めよ.

(配点 100 点)

- 2 定数 k を実数とする. 座標平面上に 4 つの定点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$, $D(\vec{d})$ がある. $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$ とし, $\vec{d} = 4\vec{b}$ とする. このとき, C を中心とする円 K 上の任意の点を $P(\vec{p})$ とし, K はベクトル方程式

$$(\vec{p} - k\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{p} + 3\vec{b}) = 0$$

で表されたとする. また, D を通り, $\vec{a}$ に平行な直線を ℓ とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) $\vec{c}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, k を用いて表せ.
- (2) K の半径が $\sqrt{3}$ となる k の値を求めよ.
- (3) C から ℓ に下ろした垂線の足を H とする. H の位置ベクトル $\vec{h}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, k を用いて表せ.
- (4) ℓ が, K と共有点をもつとすると, k のとり得る値の範囲を求めよ.

(配点 100 点)

3 関数 $f(x) = \int_0^\pi |t^2 - x^2| \sin t \, dt$ について、以下の問いに答えよ.

(1) $f(0)$ を求めよ.

(2) 定数 a を実数とする. $f(a)$ を求めよ.

(3) $f(x)$ は $x = \pi$ で微分可能であることを示せ.

(4) 点 $(\pi, f(\pi))$ における曲線 $C: y = f(x)$ の接線を ℓ とする. C , ℓ , および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

(配点 100 点)

- 4 A を成分が実数である 2 次の正方行列, E を 2 次の単位行列とする. 数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 2^n, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定める. $b_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とおく. また, 座標平面上の点 $P_n(x_n, y_n)$ を

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^{b_n} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.
- (2) A は $\sqrt{2}A^2 = (1 + \sqrt{3})A - \sqrt{2}E$ を満たすとする. A の逆行列 A^{-1} が存在することを示せ.
- (3) (2), かつ, $x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}, y_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ のとき, x_3, y_3 を求めよ. ただし, A^{-1} が存在することを証明なしに用いてよい.
- (4) (3) のとき, $x_{n+1} = x_1, y_{n+1} = y_1$ となる最小の自然数 n を求めよ.

(配点 100 点)