

(1)

余弦の加法定理より,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

が成り立つ。これらの辺々を足し合わせると,

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta \quad \cdots \textcircled{1}$$

という等式が得られる。ここで, $A = \alpha + \beta$, $B = \alpha - \beta$ とおくと,

$$\alpha = \frac{A+B}{2}$$

$$\beta = \frac{A-B}{2}$$

と表すことができるので, ①式中の α , β を消去すれば, 示すべき等式

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

が得られる。

(証明終)

(2)

まず $A+B+C=\pi$ であることから,

$$A+B=\pi-C$$

がいえ。これと(1)の結果より,

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ &= 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) \cos \frac{A-B}{2} \\ &= 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} \end{aligned}$$

と変形することができる。ここで, $\cos \frac{A-B}{2} \leq 1$ ($0 < A < \pi, 0 < B < \pi$ より

$-\frac{\pi}{2} < \frac{A-B}{2} < \frac{\pi}{2}$) であるから,

$$\cos A + \cos B \leq 2 \sin \frac{C}{2}$$

であることがわかる。等号が成立するのは $A=B$ のときである。

(証明終)

(答) 等号成立は $A=B$ のとき

(3)

(2)の結果を用いると,

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C &\leq 2 \sin \frac{C}{2} + \cos C \quad (\text{等号成立は } A=B \text{ のとき}) \\ &= 2 \sin \frac{C}{2} + \left(1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} \right) \\ &= -2 \left(\sin \frac{C}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

が成り立つ。 $0 < C < \pi$ より $0 < \sin \frac{C}{2} \leq 1$ であることから, $\cos A + \cos B + \cos C$ が最大となる

のは, $A=B$ かつ $\sin \frac{C}{2} = \frac{1}{2}$ のときである。このとき

$$\frac{C}{2} = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{3}$$

である。また, $A+B+C=\pi$ であることもあわせて考えると,

$$A=B=\frac{\pi-C}{2}=\frac{\pi}{3}$$

となることがわかる。

(答) $A=B=C=\frac{\pi}{3}$

2

(1)

まず、実数 s を $s=k$ (k は定数) に固定して考え、2 点 A_k, D_k を次の 2 式

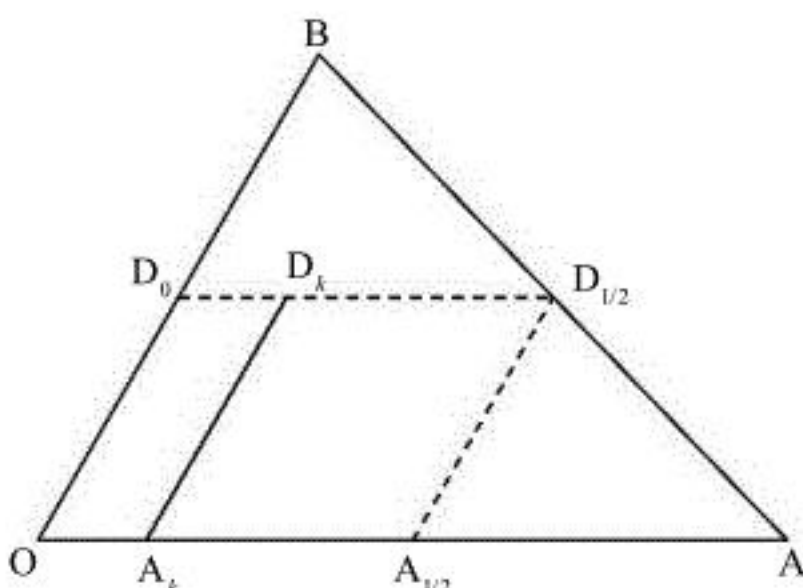
$$\overrightarrow{OA_k} = k\overrightarrow{OA} = k\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OD_k} = \overrightarrow{OA_k} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = k\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

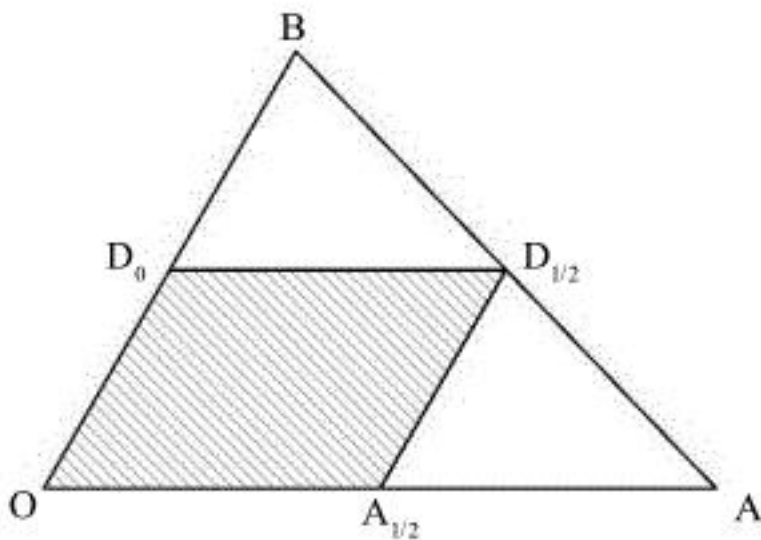
によって定める。このとき実数 t を $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ の範囲で動かすと、

$$\overrightarrow{OP} = k\vec{a} + t\vec{b}$$

より、点 P は線分 $A_k D_k$ の全体を動くことがわかる。



つぎに、 k を $0 \leq k \leq \frac{1}{2}$ の範囲で動かすと、線分 $A_k D_k$ は線分 OD_0 ($A_0 D_0$) から $A_{1/2} D_{1/2}$ まで辺 OA と平行に移動する。よって点 P の存在範囲は、平行四辺形 $OA_{1/2} D_{1/2} D_0$ (下図の斜線部) となる。ここで、点 $D_0, A_{1/2}, D_{1/2}$ はそれぞれ辺 OB, OA, AB の中点である。



(答) 平行四辺形 $OA_{1/2} D_{1/2} D_0$

(2)

条件より $s + \frac{2}{3}t = \frac{3s+2t}{3} = 1$ であることに注目して、 $\overrightarrow{OP}$ の式を各項の係数の和が 1 になるように変形すると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= s\vec{a} + t\vec{b} \\ &= s\vec{a} + \frac{2}{3}t\left(\frac{3}{2}\vec{b}\right)\end{aligned}$$

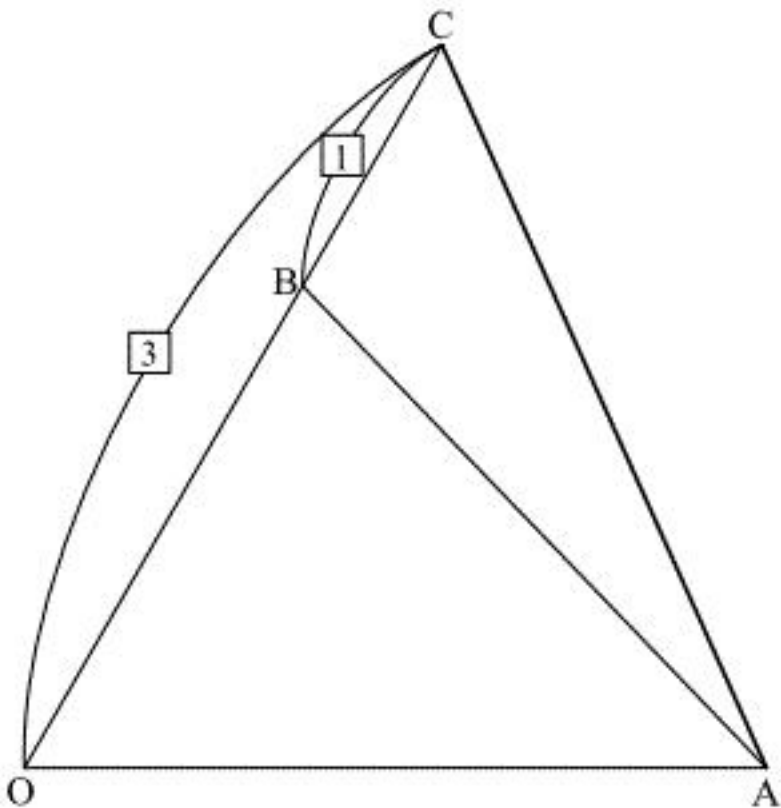
のように書くことができる。ここで、点 C は辺 OB を 3:1 に外分する点なので、 $\frac{3}{2}\vec{b} = \overrightarrow{OC}$ である。よって、

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}t\overrightarrow{OC}$$

と表すことができ、各項の係数は与えられた条件より、

$$s + \frac{2}{3}t = \frac{3s+2t}{3} = 1, \quad s \geq 0, \quad \frac{2}{3}t \geq 0$$

をみたら、点 P は線分 AC の全体を動くことがわかる。



(答) 線分 AC

(3)

与えられた 2 式

$$s + 2t = 2$$

$$3s + 2t = 3$$

を s と t の連立方程式とみなして解くと、 $s = \frac{1}{2}, t = \frac{3}{4}$ と求まる (これは $s \geq 0, t \geq 0$ という条件もみたしている)。この結果を (2) で得られた $\overrightarrow{OP}$ を表す式に代入すると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= s\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}t\overrightarrow{OC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

となり、点 P は線分 AC の中点であることがわかるから、

$$\frac{|\overrightarrow{CP}|}{|\overrightarrow{AP}|} = 1$$

と求まる。

(答) $\frac{|\overrightarrow{CP}|}{|\overrightarrow{AP}|} = 1$

(4)

まず準備として $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を求めておくと、

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ \\ &= 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 6\end{aligned}$$

である。ここで辺 AB の中点を M とすると、 P は辺 AB の垂直二等分線上にあることから、 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PM} = 0$ である。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PM} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\vec{b} - \vec{a}) \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right) - (s\vec{a} + t\vec{b}) \right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow -\left(\frac{1}{2} - s \right) |\vec{a}|^2 + (t - s) \vec{a} \cdot \vec{b} + \left(\frac{1}{2} - t \right) |\vec{b}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -\left(\frac{1}{2} - s \right) \cdot 4^2 + (t - s) \cdot 6 + \left(\frac{1}{2} - t \right) \cdot 3^2 &= 0 \\ \therefore 20s - 6t &= 7\end{aligned}$$

が得られる。

(答) $20s - 6t = 7$

3

(1)

$f(x)=x^3-2x^2-x+2$ を x で微分すると $f'(x)=3x^2-4x-1$ であるから、曲線 C 上の点

$(t, f(t))$ における接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t) + f(t) \\ &= (3t^2-4t-1)(x-t) + (t^3-2t^2-t+2) \end{aligned}$$

$$\therefore y = (3t^2-4t-1)x - 2t^3 + 2t^2 + 2$$

となる。この直線が点 $P(0, a)$ を通るとき、等式

$$a = -2t^3 + 2t^2 + 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

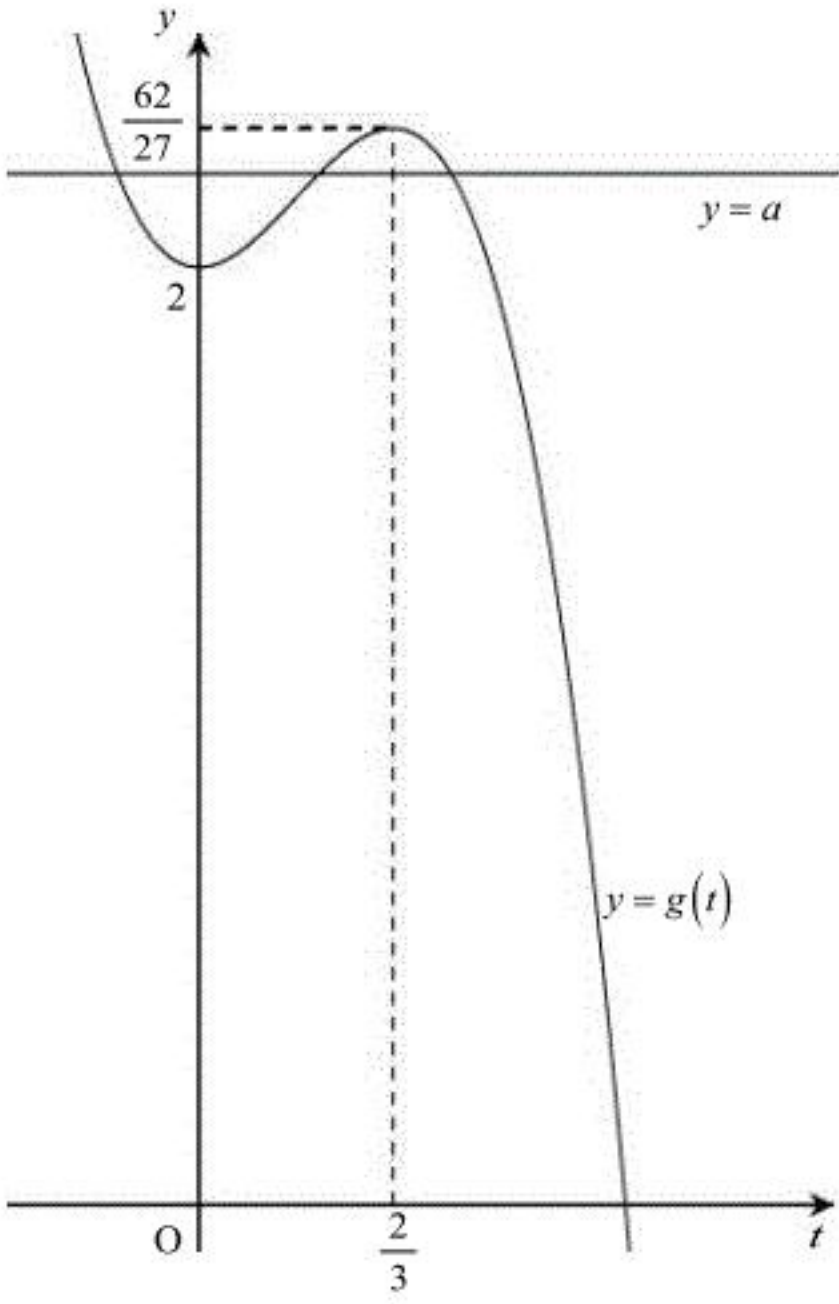
が成り立つ。点 P から C に引ける接線の本数と、 t の 3 次方程式 $\textcircled{1}$ がもつ異なる実数解の個数は等しいので、題意の条件を求めることは、3 次方程式 $\textcircled{1}$ が異なる 3 つの実数解をもつための a の範囲を求めることに帰着される。 $\textcircled{1}$ 式の右边を $g(t) = -2t^3 + 2t^2 + 2$ とおくと、

$$g'(t) = -6t^2 + 4t = -2t(3t-2)$$

であるから、増減表は、

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{62}{27}$	$\searrow$

となり、これより $y = g(t)$ のグラフは下のようになる。



t の 3 次方程式 $\textcircled{1}$ の実数解の個数は、曲線 $y = g(t)$ と直線 $y = a$ との交点の数と等しいので、

求める a の条件は、

$$2 < a < \frac{62}{27}$$

である。

(答) $2 < a < \frac{62}{27}$

(2)

曲線 C 上の点 $Q(s, f(s))$ における接線の方程式は、(1) と同様に

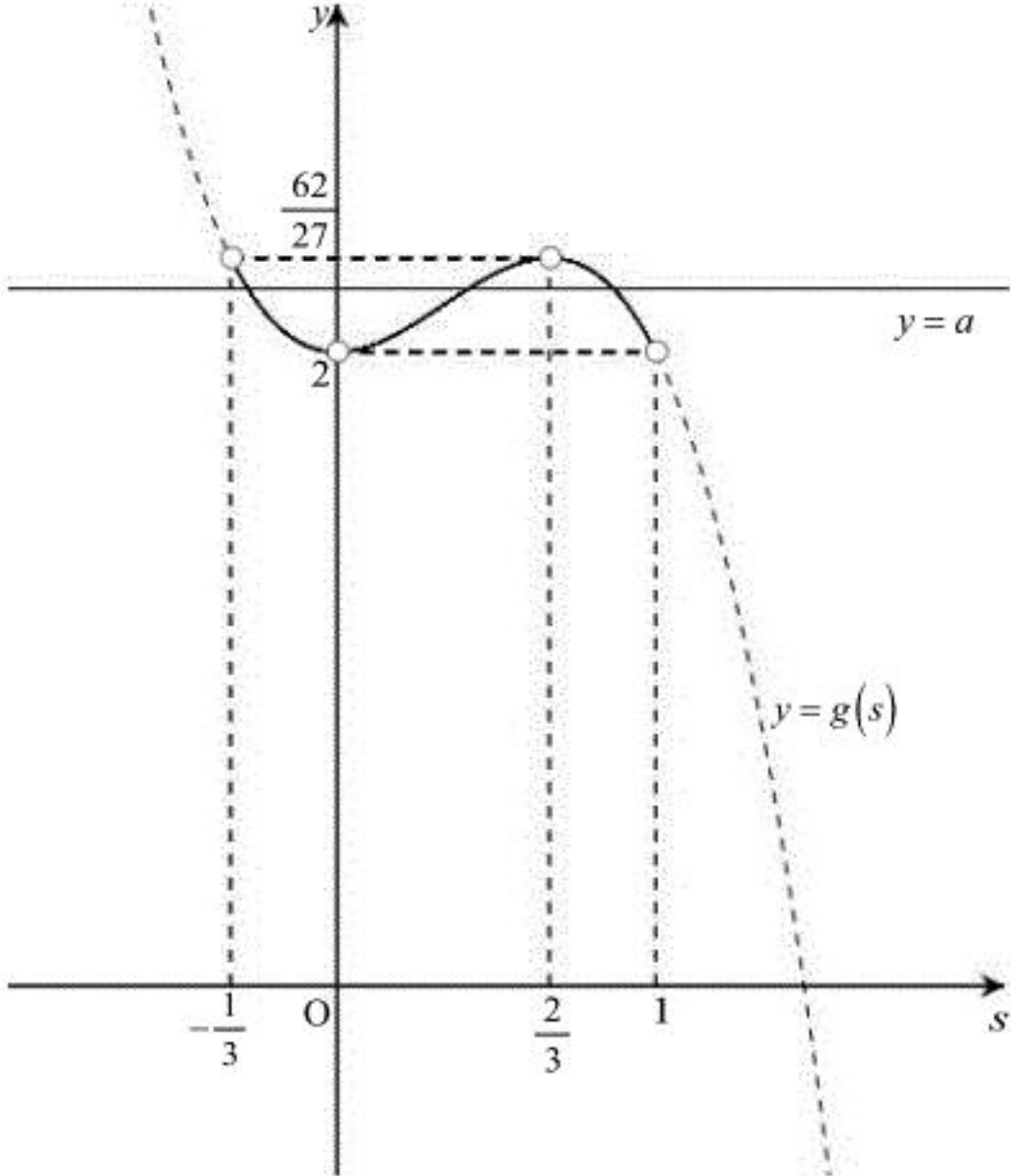
$$y = (3s^2-4s-1)x - 2s^3 + 2s^2 + 2$$

と求まり、これが点 $P(0, a)$ を通ることから、等式

$$a = -2s^3 + 2s^2 + 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。 a を (1) で求めた範囲 $2 < a < \frac{62}{27}$ で動かすときの、 s の 3 次方程式 $\textcircled{2}$ の解がとり

得る値の範囲を求めればよく、それに対応する $y = g(s)$ は下のグラフの実線部である（白丸を除く）。



s がとり得る値の範囲の端点を求めるために、式 $\textcircled{2}$ に $a = 2, \frac{62}{27}$ をそれぞれ代入してみると、

[1] $a = 2$ のとき

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow s^2(s-1) = 0 \text{ より、} s \text{ がとり得る値の範囲の右端は } s = 1 \text{ である。}$$

[2] $a = \frac{62}{27}$ のとき

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow \left(s - \frac{2}{3}\right)^2 \left(s + \frac{1}{3}\right) = 0 \text{ より、} s \text{ がとり得る値の範囲の左端は } s = -\frac{1}{3} \text{ である。}$$

以上 [1], [2] より、求める範囲は、

$$-\frac{1}{3} < s < 1 \quad (\text{ただし } s = 0, \frac{2}{3} \text{ を除く})$$

である。

(答) $-\frac{1}{3} < s < 1$ (ただし $s = 0, \frac{2}{3}$ を除く)