

1

一般に、点 X に対して、ベクトル $\overrightarrow{OX}$ を $\overrightarrow{x}$ のように表す。

(1)

$$\begin{aligned}(2-t)\overrightarrow{PO} + 2(1-t)\overrightarrow{PA} + 3t\overrightarrow{PB} &= \overrightarrow{0} \\ \Leftrightarrow (2-t)(-\overrightarrow{p}) + 2(1-t)(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{p}) + 3t(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{p}) &= \overrightarrow{0} \\ \therefore \overrightarrow{p} &= \frac{1}{2}(1-t)\overrightarrow{a} + \frac{3}{4}t\overrightarrow{b}\end{aligned}$$

と求まる。また、 $\overrightarrow{p}$ に出てくる係数の和

$$\frac{1}{2}(1-t) + \frac{3}{4}t = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}t \neq 0$$

に注意すれば、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{p} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}t\right) \cdot \frac{\frac{1}{2}(1-t)\overrightarrow{a} + \frac{3}{4}t\overrightarrow{b}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}t} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}t\right) \cdot \frac{2(1-t)\overrightarrow{a} + 3t\overrightarrow{b}}{t+2}\end{aligned}$$

のように書くことができ、ここで、 $\frac{2(1-t)\overrightarrow{a} + 3t\overrightarrow{b}}{t+2}$ は $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ の係数の和が、1 であり、かつ、 $\overrightarrow{p}$ に平行なベクトルであるから、これが $\overrightarrow{c}$ であることがわかる。したがって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{c} - \overrightarrow{b} \\ &= \frac{2(1-t)}{t+2}\overrightarrow{a} + \frac{2t-2}{t+2}\overrightarrow{b} \\ &= \frac{2(1-t)}{t+2}(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{c} - \overrightarrow{a} \\ &= \frac{-3t}{t+2}\overrightarrow{a} + \frac{3t}{t+2}\overrightarrow{b} \\ &= -\frac{3t}{t+2}(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})\end{aligned}$$

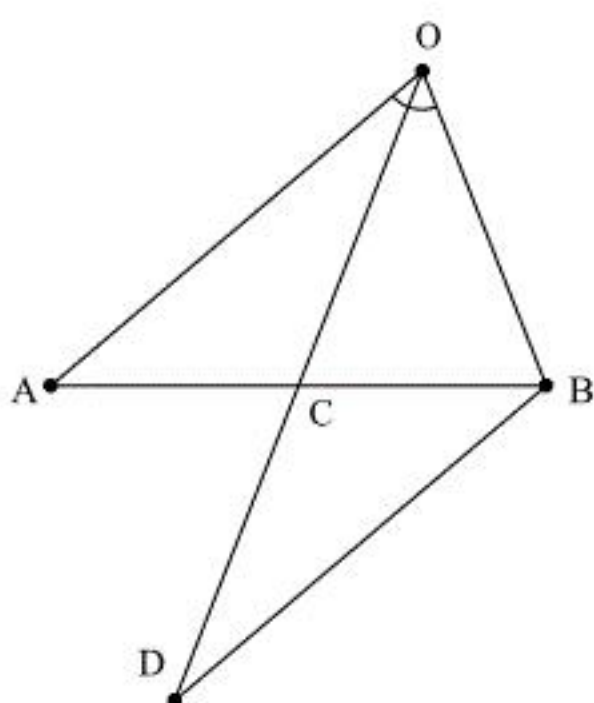
であるから、

$$\begin{aligned}\frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AC}|} &= \frac{\left|\frac{2(1-t)}{t+2}(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})\right|}{\left|\frac{-3t}{t+2}(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})\right|} \\ &= \frac{2|1-t|}{3t}\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{2|1-t|}{3t}$$

(2)



上図のように点 B を通り直線 OA と平行な直線と、直線 OC の交点を D とする。

錯角は等しいため $\angle COA = \angle BDC$ であり、 $\angle COA = \angle BOC$ から $\angle BDC = \angle BOC$ である。

すなわち $\triangle BOD$ は $BO = BD$ の二等辺三角形である。よって $BD = b$ である。

また、 $\angle OCA = \angle BCD$, $\angle COA = \angle BDC$ より $\triangle ACO$ と $\triangle BCD$ は相似であり、その相似比は $AO : BD = a : b$ である。

よって対応する辺の比は等しいので $AC : BC = a : b$ となる。

(証明終)

(3)

点 C が線分 AB 上にあることから、 $\overrightarrow{c}$ に現れる $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の係数は、共に 0 より大きい。したがって、 $0 < t < 1$ であり、(1), (2) の結果と合わせ、

$$\frac{2(1-t)}{3t} = \frac{b}{a} \quad \therefore t = \frac{2a}{2a+3b}$$

である。 $\triangle ABO$ と $\triangle PAB$ は辺 AB を共有するので、この辺を底辺と考えれば、面積比は高さの比として求まる。したがって、

$$\begin{aligned}\frac{S_2}{S_1} &= \frac{PC}{OC} \\ &= \left| \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}t \right) - 1 \right| \\ &= \frac{1}{4}|t-2| \\ &= \frac{1}{4} \left(2 - \frac{2a}{2a+3b} \right) \\ &= \frac{a+3b}{2(2a+3b)}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{S_2}{S_1} = \frac{a+3b}{2(2a+3b)}$$

2

(1)

$$\begin{aligned} 2a_{n+1} &= a_n + 1 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - 1 &= \frac{1}{2}(a_n - 1) \end{aligned}$$

であるから、数列 $\{a_n - 1\}$ は初項 $a_1 - 1 = 2$ 、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。よって、

$$\begin{aligned} a_n - 1 &= (a_1 - 1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\ \therefore a_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 1 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 1$$

(2)

$$\begin{aligned} 2b_{n+2} &= -b_{n+1} + b_n + 1 \\ \Leftrightarrow 2(b_{n+2} + b_{n+1}) &= b_{n+1} + b_n + 1 \\ \therefore 2c_{n+1} &= c_n + 1 \end{aligned}$$

であるから、 $\{c_n\}$ の満たす漸化式は $\{a_n\}$ と同じである。 $c_1 = b_1 + b_2 = 2$ に注意して、

$$\begin{aligned} c_n - 1 &= (c_1 - 1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ \therefore c_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1$$

(3)

(2)より、

$$\begin{aligned} b_{n+1} + b_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1 \\ \Leftrightarrow b_{n+1} - \frac{1}{2} &= -\left(b_n - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ \Leftrightarrow 2^{n+1} \left(b_{n+1} - \frac{1}{2}\right) &= -2 \cdot 2^n \left(b_n - \frac{1}{2}\right) + 4 \\ \Leftrightarrow d_{n+1} &= -2d_n + 4 \\ \Leftrightarrow d_{n+1} - \frac{4}{3} &= -2 \left(d_n - \frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、

$$d_n = 2^n \left(b_n - \frac{1}{2}\right)$$

とおいた。 $d_1 = 2^1 \cdot \left(b_1 - \frac{1}{2}\right) = 1$ であるから、

$$\begin{aligned} d_n - \frac{4}{3} &= (-2)^{n-1} \left(d_1 - \frac{4}{3}\right) = -\frac{1}{3} (-2)^{n-1} \\ \therefore d_n &= -\frac{1}{3} (-2)^{n-1} + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となり、したがって、

$$b_n = \frac{d_n}{2^n} + \frac{1}{2} = \frac{(-1)^n}{6} + \frac{4}{3 \cdot 2^n} + \frac{1}{2}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad b_n = \frac{(-1)^n}{6} + \frac{4}{3 \cdot 2^n} + \frac{1}{2}$$

(4)

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (a_{2k} - 1) b_{2k} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-2} \cdot \left\{ \frac{1}{6} + \frac{4}{3 \cdot 2^{2k}} + \frac{1}{2} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \left(\frac{1}{16}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

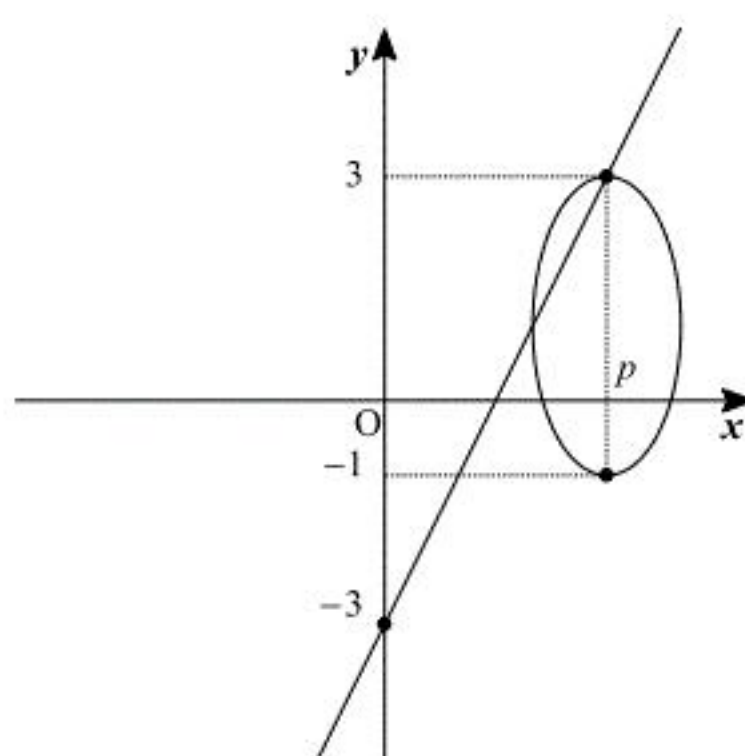
であるから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \left(\frac{1}{16}\right)^{k-1} \right\} \\ &= \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{16}} \\ &= \frac{8}{9} + \frac{16}{45} \\ &= \frac{56}{45} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{56}{45}$$

(1)



C_2 の方程式は $4(x-p)^2 + (y-1)^2 = 4$ である。 ℓ は $(0, -3)$ を通り傾き k の直線である。 ℓ と C_2 が

$k=1, 2$ でともに共有点を 2 つもてば、その間の値でも共有点は 2 つ存在するので、 $k=1, 2$ で共有点を 2 つもつ条件について考えよう。

$k=1$ のとき ℓ の方程式は $y=x-3$ であるから C_2 の方程式に代入して

$$\begin{aligned} 4(x-p)^2 + (x-4)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow 5x^2 - (8p+8)x + 4p^2 + 12 &= 0 \end{aligned}$$

である。上式の判別式が 0 より大きければ異なる共有点が 2 つ存在するので、判別式を D_1 とし、

$$\begin{aligned} \frac{D_1}{4} &> 0 \\ \Leftrightarrow (4p+4)^2 - 5(4p^2+12) &> 0 \\ \Leftrightarrow -4p^2 + 32p - 44 &> 0 \\ \Leftrightarrow -4(p^2 - 8p + 11) &> 0 \\ \Leftrightarrow 4 - \sqrt{5} < p < 4 + \sqrt{5} &\dots\dots ① \end{aligned}$$

となる。

$k=2$ のとき ℓ の方程式は $y=2x-3$ であるから C_2 の方程式に代入して

$$\begin{aligned} 4(x-p)^2 + (2x-4)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow 8x^2 - (8p+16)x + 4p^2 + 12 &= 0 \end{aligned}$$

である。

上式の判別式が 0 より大きければ異なる共有点が 2 つ存在するので、判別式を D_2 とし、

$$\begin{aligned} \frac{D_2}{4} &> 0 \\ \Leftrightarrow (4p+8)^2 - 8(4p^2+12) &> 0 \\ \Leftrightarrow -16p^2 + 364p - 32 &> 0 \\ \Leftrightarrow -16(p^2 - 4p + 2) &> 0 \\ \Leftrightarrow 2 - \sqrt{2} < p < 2 + \sqrt{2} &\dots\dots ② \end{aligned}$$

である。

以上より、①と②の共通範囲を求めて、答は

$$4 - \sqrt{5} < p < 2 + \sqrt{2}$$

となる。

(答) $4 - \sqrt{5} < p < 2 + \sqrt{2}$

(2)

C_1 上の点 $P(x, y)$ を 75° 原点周りに回転移動した点を $P'(x', y')$ とする。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 75^\circ & -\sin 75^\circ \\ \sin 75^\circ & \cos 75^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos 75^\circ & \sin 75^\circ \\ -\sin 75^\circ & \cos 75^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x' \cos 75^\circ + y' \sin 75^\circ \\ -x' \sin 75^\circ + y' \cos 75^\circ \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。この式を C_1 の方程式に代入して、

$$\begin{aligned} 4x^2 + y^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow 4(x'^2 \cos^2 75^\circ + 2x'y' \sin 75^\circ \cos 75^\circ + y'^2 \sin^2 75^\circ) + \\ x'^2 \sin^2 75^\circ - 2x'y' \sin 75^\circ \cos 75^\circ + y'^2 \cos^2 75^\circ &= 4 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \cos^2 75^\circ &= \frac{1 + \cos 150^\circ}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \sin^2 75^\circ &= \frac{1 - \cos 150^\circ}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 2 \sin 75^\circ \cos 75^\circ &= \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

であるから、これらを代入して、

$$\begin{aligned} 4 \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) x'^2 + \frac{1}{2} x'y' + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) y'^2 \right) + \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) x'^2 - \frac{1}{2} x'y' + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) y'^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4} \right) x'^2 + \frac{3}{2} x'y' + \left(\frac{5}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4} \right) y'^2 - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow x'^2 + \frac{6(10+3\sqrt{3})}{73} x'y' + \frac{(10+3\sqrt{3})^2}{73} y'^2 - \frac{16(10+3\sqrt{3})}{73} &= 0 \end{aligned}$$

である。以上から

$$a = \frac{6(10+3\sqrt{3})}{73}, b = \frac{(10+3\sqrt{3})^2}{73}$$

である。

(答) $a = \frac{6(10+3\sqrt{3})}{73}, b = \frac{(10+3\sqrt{3})^2}{73}$