

平成23年度 前期日程
入学者選抜学力検査問題

環境・情報科学科
数 学

〔注 意〕

- 1 机上に受験票を提示しておくこと。
- 2 監督者の指示があるまで、この問題冊子を開いてはいけない。
- 3 解答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。
- 4 解答用紙に受験番号および氏名を必ず記入すること。
- 5 この冊子の問題は4ページからなっている。
- 6 解答用紙は4枚ある。
- 7 下書き用紙は4枚ある。
- 8 この問題冊子のうち、落丁・乱丁および印刷不鮮明な箇所があれば、手をあげて申し出ること。
- 9 この問題の内容に関する質問には答えない。
- 10 試験開始後60分経過しないと退室できない。退室するときには、解答用紙を机上に置き、問題冊子、下書き用紙は持ち帰ること。

1 $t > 0$ とする. 平面上に $\triangle OAB$ と点 P がある. P は $(2-t)\overrightarrow{PO} + 2(1-t)\overrightarrow{PA} + 3t\overrightarrow{PB} = \vec{0}$ を満たす. 直線 OP と直線 AB の交点を C とする. $|\overrightarrow{OA}| = a$, $|\overrightarrow{OB}| = b$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $\frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AC}|}$ を t を用いて表せ.

(2) 線分 OC が $\angle AOB$ の 2 等分線となるとき, C は辺 AB を $a:b$ に内分する点であることを示せ.

(3) (2) のとき, $\triangle OAB$ の面積を S_1 , $\triangle PAB$ の面積を S_2 とする. $\frac{S_2}{S_1}$ を a, b を用いて表せ.

(配点 100 点)

2 2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を漸化式

$$a_1 = 3, \quad 2a_{n+1} = a_n + 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 1, \quad 2b_{n+2} = -b_{n+1} + b_n + 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定める．以下の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) 漸化式 $c_n = b_{n+1} + b_n$ ($n = 1, 2, \dots$) によって定められる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) $S_n = \sum_{k=1}^n (a_{2k} - 1)b_{2k}$ とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ．

(配点 100 点)

3 n を 5 以上の整数とする. 座標平面上に原点 O を中心とする半径 n の円 C_1 と, 点 A を中心とする半径 1 の円 C_2 がある. C_2 が C_1 に外接しながらすべることなく反時計回りに転がるとき, C_2 上の点 P が描く曲線を考える. はじめに A は $(n+1, 0)$, P は $(n, 0)$ の位置にあるものとする. P が $(n, 0)$ から出発し, 再び $(n, 0)$ に戻るまで, P が描く曲線を C とする. 線分 OA と x 軸の正の部分のなす角が θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) であるときの P の座標を $(x(\theta), y(\theta))$ とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) $x(\theta), y(\theta)$ を θ を用いて表せ.
- (2) 区間 $0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{n}$ で $x(\theta)$ の増減を調べよ.
- (3) C によって囲まれた部分の面積を求めよ.

(配点 100 点)

4 座標平面上の楕円 $C_1 : 4x^2 + y^2 = 4$ について、以下の問いに答えよ.

- (1) C_1 を x 軸方向に p , y 軸方向に 1 だけ平行移動した楕円を C_2 とする. $1 \leq k \leq 2$ を満たすすべての k に対して、直線 $\ell : y = kx - 3$ と C_2 が 2 個の共有点をもつとき、 p の値の範囲を求めよ.
- (2) a, b, c, d, e を定数とする. C_1 を原点まわりに 75° 回転した 2 次曲線を $C_3 : x^2 + axy + by^2 + cx + dy + e = 0$ とするとき、 a, b の値を求めよ.

(配点 100 点)