

# 1

(1)

$$\frac{6}{3-\sqrt{3}}=3+\sqrt{3} \text{ であり, } 1<\sqrt{3}<2 \text{ が成り立つから}$$

$$a=4, b=\sqrt{3}-1$$

である。よって

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= 4^2+(\sqrt{3}-1)^2 \\ &= 20-2\sqrt{3} \end{aligned}$$

である。

(答)  $20-2\sqrt{3}$

(2)

$(x+2)^{12}$  を展開したとき、二項定理より、 $x^r$  ( $0 \leq r \leq 12$ ) の項は、

$${}_{12}C_r 2^{12-r} \cdot x^r$$

となるから、 $x^r$  の係数は  ${}_{12}C_r 2^{12-r}$  である。 $f(r) = {}_{12}C_r 2^{12-r}$  とおき、これを最大にする整数  $r$  を考える。 $0 \leq r \leq 11$  のとき

$$\begin{aligned} \frac{f(r+1)}{f(r)} &= \frac{12! \cdot 2^{11-r}}{(r+1)!(11-r)!} \cdot \frac{r!(12-r)!}{12! \cdot 2^{12-r}} \\ &= \frac{(12-r)}{2(r+1)} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{13}{r+1} - 1 \right) \end{aligned}$$

となるからこれは減少関数であることがわかる。加えて、 $\frac{f(4)}{f(3)} = \frac{9}{8} > 1$ ,  $\frac{f(5)}{f(4)} = \frac{4}{5} < 1$  であるから、

$$0 \leq r \leq 3 \text{ のとき } \frac{f(r+1)}{f(r)} > 1 \Leftrightarrow f(r) < f(r+1),$$

$$4 \leq r \leq 11 \text{ のとき } \frac{f(r+1)}{f(r)} < 1 \Leftrightarrow f(r) > f(r+1)$$

である。以上のことから  $f(r)$  の大小は

$$f(0) < \cdots < f(3) < f(4) > f(5) > \cdots > f(12)$$

と表わすことができるため、最大の係数の値は

$$f(4) = {}_{12}C_4 2^8 = 126720$$

である。

(答) 126720

(3)

$AB=4$ ,  $BC=5$ ,  $CA=6$  とした  $\triangle ABC$  を考えると、余弦定理より

$$\cos A = \frac{4^2+6^2-5^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{9}{16}$$

となる。いま、 $0^\circ < A < 180^\circ$  ( $\because$  三角形の内角) より  $\sin A > 0$  であるから、

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{5\sqrt{7}}{16}$$

を得る。よって、 $\triangle ABC$  の面積を  $S$  とすると、

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{5\sqrt{7}}{16} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$$

と求めることができる。ここで、内接する円の半径を  $r$  とすると

$$S = \frac{1}{2} r (4+5+6)$$

が成り立つから、

$$r = \frac{2}{4+5+6} S = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

である。

(答)  $\frac{\sqrt{7}}{2}$

2

(1)

$\int_{-1}^1 f(t) dt = A$  とおくと  $f(x) = x^2 + A$  であり、これが偶関数であることに注意すると

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 f(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 (x^2 + A) dt \\ &= 2 \left[ \frac{1}{3} x^3 + Ax \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} + 2A \end{aligned}$$

と変形できる。よって、 $A = -\frac{2}{3}$  であるから  $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}$  と求まる。

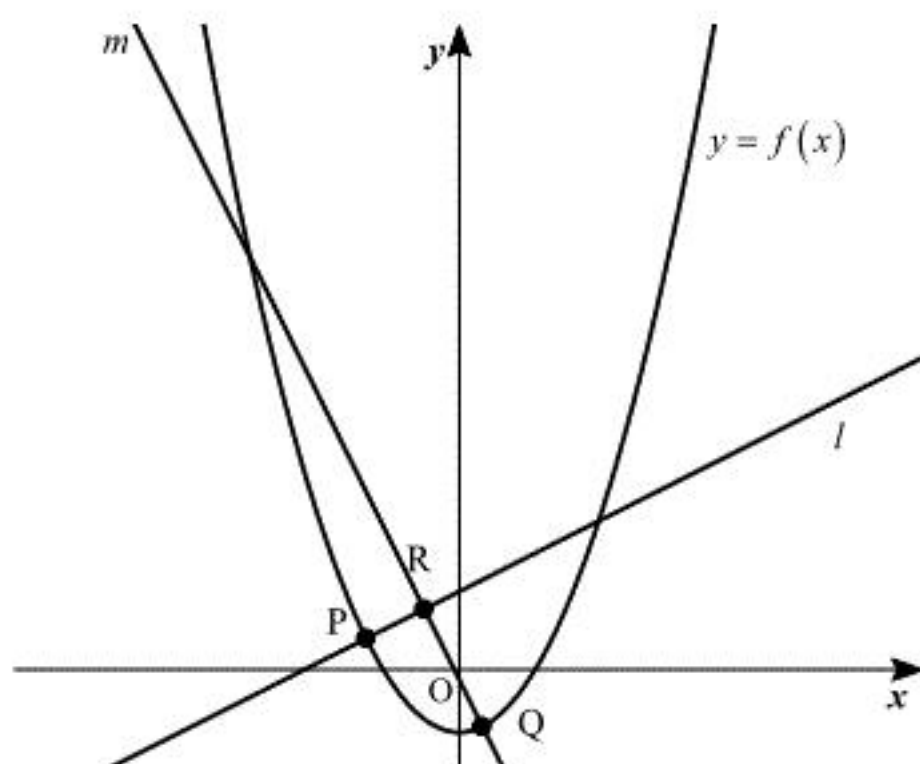
(答)  $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}$

(2)

$\angle PRQ = \frac{\pi}{2}$  のとき、 $a = 0$  とすると直線  $l$  の方程式は  $x = 0$  であるが、 $b > 0$  のとき直線  $m$  の方

程式は  $y - f(b) = -\frac{1}{2b}(x - b)$  と表わされ、 $x$  の係数は 0 になることはなく  $\angle PRQ = \frac{\pi}{2}$  となら

ない。よって  $a \neq 0$  である。同様に  $b \neq 0$  であることもわかり、グラフは下図のようになる。



$f'(x) = 2x$  より、直線  $l, m$  の方程式は順に

$$\begin{aligned} y - f(a) &= -\frac{1}{2a}(x - a) \\ y - f(b) &= -\frac{1}{2b}(x - b) \end{aligned}$$

である。これらの式から  $y$  を消去して求められる  $x = -2ab(a + b)$  が、点  $R$  の  $x$  座標である。

ここで、直線  $l$  と直線  $m$  が直交することから

$$\left(-\frac{1}{2a}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2b}\right) = -1 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{4a}$$

という関係が成り立つので、点  $R$  の  $x$  座標は

$$x = -2a \cdot \left(-\frac{1}{4a}\right) \left(a - \frac{1}{4a}\right) = \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{4a}\right)$$

である。

(答)  $x = \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{4a}\right)$

(3)

$R$  が  $y$  軸上にあるとき、 $R$  の  $x$  座標は 0 である。よって

$$\frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{4a}\right) = 0 \Leftrightarrow a = \pm \frac{1}{2}$$

である。しかし、 $b = -\frac{1}{4a}$  かつ  $a < b$  より結局  $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$  である。このとき直線  $n$  の方

程式は  $y = -\frac{5}{12}$  となるから、 $n$  および  $C$  で囲まれた部分の面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{ -\frac{5}{12} - \left(x^2 - \frac{2}{3}\right) \right\} dx \\ &= -\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \right\}^3 \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

である。

(答)  $\frac{1}{6}$

(1)

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} + \sqrt{3}b_{n+1} &= (2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^n \\
 &= (2 + \sqrt{3})(a_n + \sqrt{3}b_n) \\
 &= (2a_n + 3b_n) + \sqrt{3}(a_n + 2b_n)
 \end{aligned}$$

であるから,

$$a_{n+1} = 2a_n + 3b_n, b_{n+1} = a_n + 2b_n$$

と表わすことができる。

$$(\text{答}) \quad a_{n+1} = 2a_n + 3b_n, b_{n+1} = a_n + 2b_n$$

(2)

$$(2 + \sqrt{3})^1 = a_1 + \sqrt{3}b_1$$

より,  $a_1 = 2, b_1 = 1$  である。ここからは,

$$(2 - \sqrt{3})^n = a_n - \sqrt{3}b_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

となることを数学的帰納法を用いて証明する。

[1]  $n=1$  のとき

$$(2 - \sqrt{3})^1 = 2 - \sqrt{3} \cdot 1 \text{ より } \textcircled{1} \text{ が成り立つ。}$$

[2]  $n=k$  のとき  $\textcircled{1}$  が成り立つと仮定すれば

$$(2 - \sqrt{3})^k = a_k - \sqrt{3}b_k \text{ であるから, (1) の結果を用いると}$$

$$\begin{aligned}
 (2 - \sqrt{3})^{k+1} &= (2 - \sqrt{3})(a_k - \sqrt{3}b_k) \\
 &= (2a_k + 3b_k) - \sqrt{3}(a_k + 2b_k) \\
 &= a_{k+1} - \sqrt{3}b_{k+1}
 \end{aligned}$$

と変形でき,  $n=k+1$  のときも  $\textcircled{1}$  が成り立つ。

以上, [1], [2] よりすべての自然数  $n$  について  $\textcircled{1}$  が成り立つ。

(証明終)

(3)

$1 < \sqrt{3} < 2$  より  $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$  であるから,  $0 < (2 - \sqrt{3})^n < 1$  である。よって

$$\begin{aligned}
 (2 + \sqrt{3})^n &< (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n < (2 + \sqrt{3})^n + 1 \\
 \Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^n &< (a_n + \sqrt{3}b_n) + (a_n - \sqrt{3}b_n) < (2 + \sqrt{3})^n + 1 \\
 \Leftrightarrow 2a_n - 1 &< (2 + \sqrt{3})^n < 2a_n
 \end{aligned}$$

と変形できる。 $2a_n - 1, 2a_n$  はともに自然数であるから,  $(2 + \sqrt{3})^n$  以下の整数のうち最大のは  $2a_n - 1$  である。

$$(\text{答}) \quad p = 2, q = -1$$