

(1)

 $f(1)=1$ より,

$$\frac{a-b}{\sqrt{5}}=1$$

$$\Leftrightarrow a-b=\sqrt{5} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。 $f(2)=1$ より,

$$\frac{a^2-b^2}{\sqrt{5}}=1$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a-b)=\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}(a+b)=\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow a+b=1 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。 ①, ②より,

$$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, b=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, b=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

(2)

(1)より $ab=-1$ となるので,

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= (a+b)^2-2ab \\ &= 1^2-2(-1) \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^3-b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2) \\ &= \sqrt{5}(3-1) \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^4-b^4 &= (a^2+b^2)(a^2-b^2) \\ &= 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

である。したがって,

$$\begin{aligned} f(3) &= \frac{a^3-b^3}{\sqrt{5}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(4) &= \frac{a^4-b^4}{\sqrt{5}} \\ &= 3 \end{aligned}$$

である。 $f(2)=1$ なので,

$$\begin{aligned} f(2)+f(3) &= 1+2 \\ &= 3 \\ &= f(4) \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(3)

初めに, x が自然数のとき, $f(x)+f(x+1)=f(x+2)$ となることを示す。

$$\begin{aligned} \sqrt{5}\{f(x)+f(x+1)\} &= a^x-b^x+a^{x+1}-b^{x+1} \\ &= (a+b)(a^x-b^x+a^{x+1}-b^{x+1}) \quad (\because a+b=1) \\ &= a^{x+2}-b^{x+2}+(a+b+ab)(a^x-b^x) \\ &= a^{x+2}-b^{x+2} \quad (\because a+b=1, ab=-1) \\ &= \sqrt{5}f(x+2) \end{aligned}$$

$$\therefore f(x)+f(x+1)=f(x+2) \quad \dots \textcircled{3}$$

である。

以下, 数学的帰納法を利用して x が自然数のとき, $f(x)$ が自然数となることを示す。[1] $x=1, 2$ のとき $f(1)=1, f(2)=1$ より, $f(1), f(2)$ は自然数である。[2] $x=k, k+1$ で題意が成り立つと仮定し, $x=k+2$ のとき③より, $f(k+2)=f(k+1)+f(k)$ が成り立つ。仮定より $f(k), f(k+1)$ は自然数だから, $f(k+2)$ も自然数となる。以上[1], [2]より, x が自然数のとき, $f(x)$ は自然数となる。

(証明終)

(1)

直線 l 上の任意の点を P とすると、実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + k \overrightarrow{AB} \\ &= (5, 3, -3) + k(-1, -1, 2) \\ &= (5-k, 3-k, 2k-3)\end{aligned}$$

とおける。したがって点 P が平面 $z=1$ 上にあるとき、

$$\begin{aligned}2k-3 &= 1 \\ \therefore k &= 2\end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= (3, 1, 1) \\ \therefore \overrightarrow{CD} &= (-2, -1, 3)\end{aligned}$$

である。 r の値は線分 CD の長さに相当するので、

$$\begin{aligned}r &= |\overrightarrow{CD}| \\ &= \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{14}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad r = \sqrt{14}$$

(2)

$$\begin{aligned}s \overrightarrow{CA} + t \overrightarrow{CB} &= s(0, 1, -1) + t(-1, 0, 1) \\ &= (-t, s, t-s)\end{aligned}$$

であるから、求める条件は

$$\begin{cases} -t = -2 \\ s = -1 \\ t-s = 3 \end{cases} \\ \therefore s = -1, t = 2$$

である。

$$(\text{答}) \quad s = -1, t = 2$$

(3)

点 H は平面 ABC 上の点で、 $\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{CB}$ は一次独立であるから、実数 a, b を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH} &= a \overrightarrow{CA} + b \overrightarrow{CB} \\ &= a(0, 1, -1) + b(-1, 0, 1) \\ &= (-b, a, b-a)\end{aligned}$$

とおける。したがって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CH} \\ &= (5-b, a+2, b-a-2)\end{aligned}$$

である。 $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{CB}$ であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{CA} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2a-b &= -4 && \cdots \cdots \text{①} \\ \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{CB} &= 0 \\ \Leftrightarrow a-2b &= -7 && \cdots \cdots \text{②}\end{aligned}$$

である。①, ②より、 $a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{10}{3}$ である。したがって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3} \right) \\ \therefore |\overrightarrow{OH}| &= \frac{5\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad OH = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

(4)

$\overrightarrow{DA} = (2, 2, -4)$, $\overrightarrow{DC} = (2, 1, -3)$ より、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{DA}|^2 &= 24 \\ |\overrightarrow{DC}|^2 &= 14 \\ \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} &= 18\end{aligned}$$

である。よって、求める面積は、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{DA}|^2 |\overrightarrow{DC}|^2 - (\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC})^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{24 \cdot 14 - 18^2} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \triangle ACD = \sqrt{3}$$

3

(1)

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad \cdots \cdots ①$$

$$y = \frac{x^2}{2} + a \quad \cdots \cdots ②$$

①に②を代入して、

$$x^4 + (4a+1)x^2 + 4a^2 - 4 = 0 \quad \cdots \cdots ③$$

となる。②より、 x が決まれば y も一意に決まるので、 x の4次方程式③の異なる実数解の個数が曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点の個数に一致する。求める条件は③が実数解をもつ条件である。

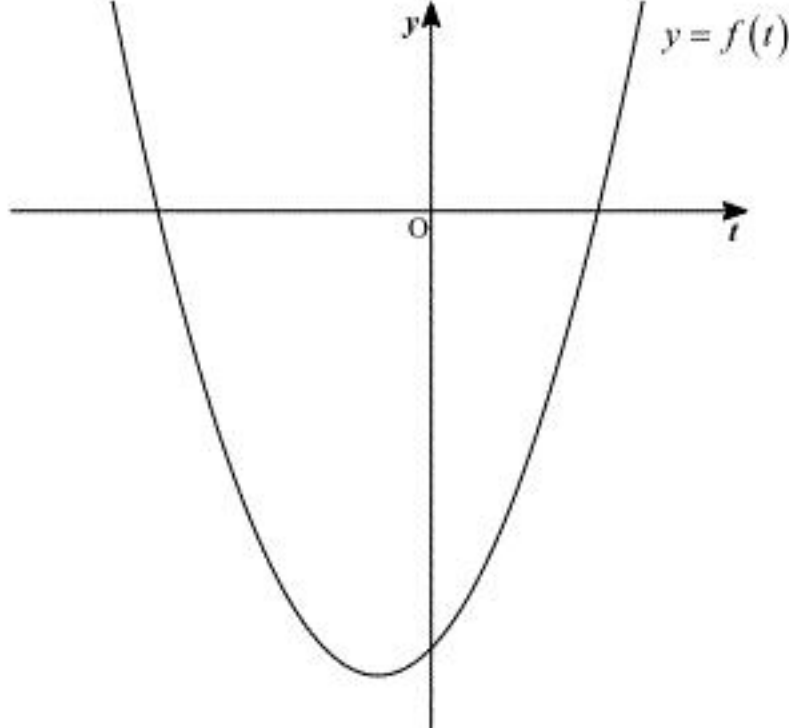
$t = x^2 \geq 0$ とおくと、③は

$$t^2 + (4a+1)t + 4a^2 - 4 = 0 \quad \cdots \cdots ④$$

となる。③が実数解をもつことは、 t の2次方程式④が $t \geq 0$ なる解をもつことと同値である。

④の左辺を $f(t)$ とおく。

[1] $f(0) \leq 0$ 、すなわち $-1 \leq a \leq 1$ のとき

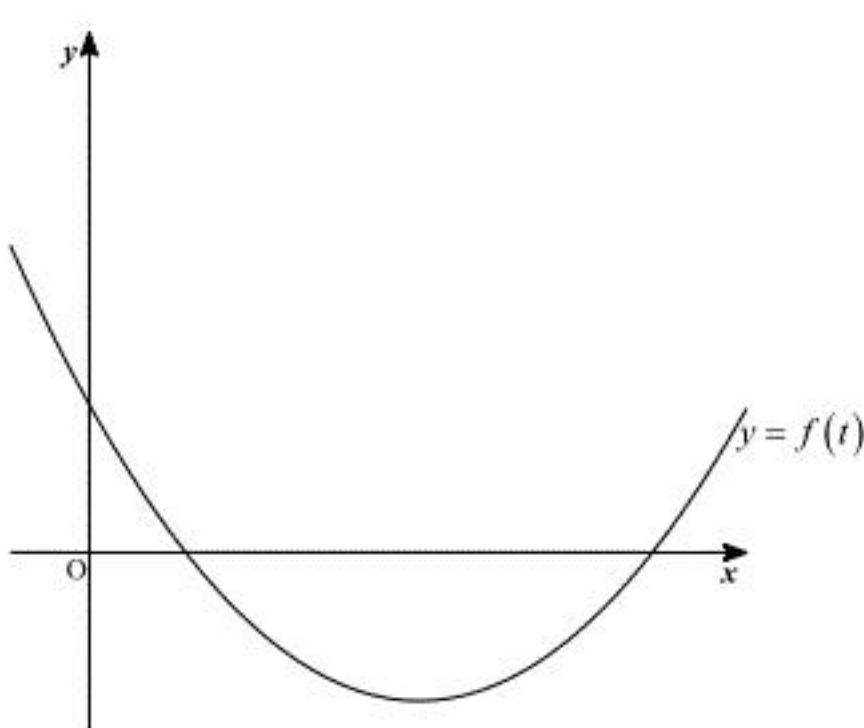


上のグラフより、④は $t \geq 0$ なる解をもつから、適する。

[2] $f(0) > 0 \therefore a < -1, 1 < a$ のとき

放物線 $y = f(t)$ の軸の方程式は $t = -\frac{1}{2}(4a+1)$ である。④の判別式を E とすると、

$$E = 8a + 17 \text{ である。}$$



上のグラフより、 $-\frac{1}{2}(4a+1) \geq 0$ かつ $E \geq 0$ が成り立たなければならない。よって、

$$-\frac{17}{8} \leq a \leq -\frac{1}{4} \text{ であるが、} a < -1, 1 < a \text{ も考慮して、} -\frac{17}{8} \leq a < -1 \text{ である。}$$

以上[1], [2]より、求める条件は $-\frac{17}{8} \leq a \leq 1$ である。

$$\text{(答)} \quad -\frac{17}{8} \leq a \leq 1$$

(2)

$-\frac{17}{8} \leq a \leq 1$ の中で場合分けする。

[1] $f(0) < 0$ 、すなわち $-1 < a < 1$ のとき

④を満たす $t = x^2 > 0$ がただ1つあるので、③を満たす x は2個ある。したがって、共有点の個数は2個である。

[2] $a = 1$ のとき

③より、 $x^2(x^2 + 5) = 0$ である。 x は実数だから、 $x = 0$ である。したがって、共有点の個数は1個である。

[3] $a = -1$ のとき

③より、 $x^2(x^2 - 3) = 0 \therefore x = 0, \pm\sqrt{3}$ である。したがって、共有点の個数は3個である。

[4] $-\frac{17}{8} < a < -1$ のとき

(1)の[2]の考察と、 E が正になることから、④を満たす異なる $t = x^2 > 0$ が2個ある。つまり、③を満たす x は4個ある。したがって、共有点の個数は4個である。

[5] $a = -\frac{17}{8}$ のとき

(1)の[2]の考察と、 E が0になることから、④を満たす $t = x^2 > 0$ がただ1つある。したがって、[1]と同様に共有点の個数は2個である。

以上[1], [2], [3], [4], [5]および(1)の結果より、共有点の個数は

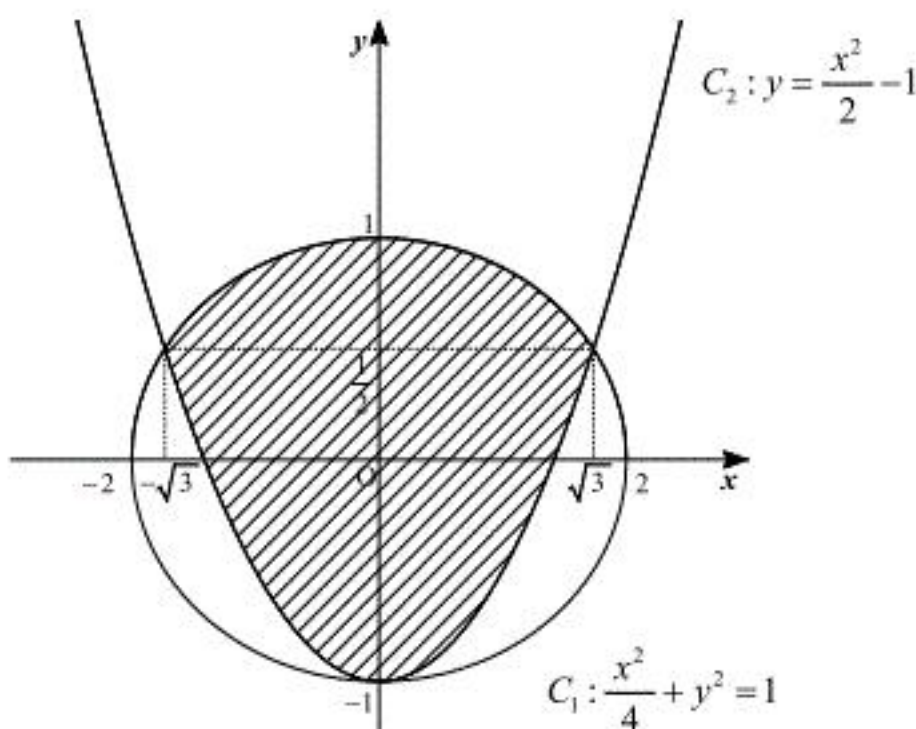
$$\left\{ \begin{array}{ll} a < -\frac{17}{8}, 1 < a \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ a = 1 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ a = -\frac{17}{8}, -1 < a < 1 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ a = -1 \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \\ -\frac{17}{8} < a < -1 \text{ のとき} & 4 \text{ 個} \end{array} \right.$$

である。

(答) 前述

(3)

(2)の[3]の考察より、領域 D は下図の斜線部分で、境界上の点を含む。



曲線 C_1 の $y \geq 0$ の部分の式は $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ であり、また、領域 D は y 軸に関して対称であるから、求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\sqrt{3}} \left\{ \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} - \left(\frac{x^2}{2} - 1 \right) \right\} dx \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - x^2} dx + \int_0^{\sqrt{3}} (2 - x^2) dx \end{aligned}$$

となる。ここで、第1項は、 $x = 2 \sin \theta$ とおくと、

$$\begin{array}{c|cc} \frac{dx}{d\theta} & 2 \cos \theta & \\ \hline x & 0 & \rightarrow \sqrt{3} \\ \theta & 0 & \rightarrow \frac{\pi}{3} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4 \cos^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 + 2 \cos 2\theta) d\theta \\ &= [2\theta + \sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{2}{3} \pi + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

である。また、第2項は、

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} (2 - x^2) dx &= \left[2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

である。したがって、

$$S = \frac{2}{3} \pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{2}{3} \pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(1)

$A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$, $18E = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$ であるから, $A^2 = 18E$ のとき両辺の各成分を比べることで

$$a^2 + bc = 18 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$b(a+d) = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$c(a+d) = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$d^2 + bc = 18 \quad \dots \textcircled{4}$$

が成り立つ。 $bc > 0$ より, $b, c \neq 0$ であるから, ②, ③より,

$$a+d=0$$

$$\Leftrightarrow a = -d \quad \dots \textcircled{5}$$

である。⑤, $a > d$ より,

$$a > 0 > d \quad \dots \textcircled{6}$$

である。⑤より, ①と④は同値である。 $bc > 0$, ①より,

$$18 - a^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 < 18$$

である。 a が整数であることと, ⑥より, $a = 1, 2, 3, 4$ である。

[1] $a = 1$ のとき

⑤より $d = -1$ であり, また, ①より $bc = 17$ である。 b, c は整数で, $b > c$ より, $(b, c) = (-1, -17), (17, 1)$ であるが, いずれも $a > b > c > d$ を満たさず, 不適である。

以下, [1]と同様に考察する。

[2] $a = 2$ のとき

$d = -2, bc = 14$ であるから, $(b, c) = (14, 1), (7, 2), (-2, -7), (-1, -14)$ であるが, いずれも $a > b > c > d$ を満たさず, 不適である。

[3] $a = 3$ のとき

$d = -3, bc = 9$ であるから, $(b, c) = (9, 1), (-1, -9)$ であるが, いずれも $a > b > c > d$ を満たさず, 不適である。

[4] $a = 4$ のとき

$d = -4, bc = 2$ であるから, $(b, c) = (2, 1), (-1, -2)$ であり, いずれも $a > b > c > d$ を満たすので適する。

以上[1], [2], [3], [4]より,

$$(a, b, c, d) = (4, 2, 1, -4), (4, -1, -2, -4)$$

である。

$$(\text{答}) \quad (a, b, c, d) = (4, 2, 1, -4), (4, -1, -2, -4)$$

(2)

$B^n = p_n B + q_n E$ の両辺に, B を左からかけると,

$$\begin{aligned} B^{n+1} &= p_n B^2 + q_n B \\ &= p_n (3B - 2E) + q_n B \quad (\because B^2 - 3B + 2E = O) \\ &= (3p_n + q_n)B - 2p_n E \end{aligned}$$

となる。また, $B^{n+1} = p_{n+1} B + q_{n+1} E$ であるから,

$$p_{n+1} = 3p_n + q_n \quad \dots \textcircled{7}$$

$$q_{n+1} = -2p_n \quad \dots \textcircled{8}$$

が成り立つ。⑦+⑧より, $p_{n+1} + q_{n+1} = p_n + q_n$ である。したがって,

$$\begin{aligned} p_n + q_n &= p_{n-1} + q_{n-1} \\ &= \dots \\ &= p_1 + q_1 \end{aligned}$$

である。ここで, $B = 1 \cdot B + 0 \cdot E$ であるから, $p_1 = 1, q_1 = 0$ である。よって,

$$p_n + q_n = 1$$

$$\Leftrightarrow q_n = 1 - p_n \quad \dots \textcircled{9}$$

である。⑦, ⑨より,

$$p_{n+1} = 2p_n + 1$$

$$\Leftrightarrow p_{n+1} + 1 = 2(p_n + 1)$$

である。したがって, 数列 $\{p_n + 1\}$ は初項 $p_1 + 1 = 2$, 公比 2 の等比数列であるから,

$$p_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1}$$

$$= 2^n$$

$$\therefore p_n = 2^n - 1$$

である。さらに⑨より,

$$q_n = 2 - 2^n$$

である。

$$(\text{答}) \quad p_n = 2^n - 1, q_n = 2 - 2^n$$

(3)

$$AB = \begin{pmatrix} 2y+9 & 3x+2z \\ -3y-12 & -4x-3z \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 9-4x & 6-3x \\ 3y-4z & 2y-3z \end{pmatrix}$$

である。成分を比較すると,

$$\begin{cases} 2y+9=9-4x \\ 3x+2z=6-3x \\ -3y-12=3y-4z \\ -4x-3z=2y-3z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ 3x+z=3 \end{cases} \quad \dots \textcircled{10}$$

である。行列 B にケーリー・ハミルトンの定理を用いると,

$$B^2 - (z+3)B + (3z-xy)E = O$$

が成り立つ。 $B^2 - 3B + 2E = O$ であるから,

$$zB = (3z-xy-2)E$$

である。 $z \neq 0$ と仮定すると, 実数 k を用いて

$$B = \frac{1}{z}(3z-xy-2)E$$

$$= \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

とおけるが, $B = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$, $x \neq y$ に矛盾し, 不適である。したがって, $z = 0$ であるから,

$$(xy+2)E = O$$

$$\therefore xy = -2 \quad \dots \textcircled{11}$$

である。 $z = 0$, ⑩, ⑪より,

$$(x, y, z) = (1, -2, 0)$$

である。行列 A にケーリー・ハミルトンの定理を用いると,

$$A^2 - E = O$$

$$\Leftrightarrow A^2 = E$$

が成り立つ。したがって,

$$\begin{aligned} (AB)^{2n} &= ABAB \cdots ABAB \\ &= AABA \cdots BABB \quad (\because AB = BA) \\ &= \dots \\ &= A^{2n} B^{2n} \\ &= E^n B^{2n} \\ &= B^{2n} \end{aligned}$$

である。(2)より,

$$\begin{aligned} (AB)^{2n} &= B^{2n} \\ &= p_{2n} B + q_{2n} E \\ &= (4^n - 1) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + (2 - 4^n) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ -2 \cdot 4^n + 2 & -4^n + 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad (x, y, z) = (1, -2, 0), \quad (AB)^{2n} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ -2 \cdot 4^n + 2 & -4^n + 2 \end{pmatrix}$$