

平成24年度 前期日程
入学者選抜学力検査問題

環境・情報科学科
数 学

〔注 意〕

- 1 机上に受験票を提示しておくこと。
- 2 監督者の指示があるまで、この問題冊子を開いてはいけない。
- 3 解答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。
- 4 解答用紙に受験番号および氏名を必ず記入すること。
- 5 この冊子の問題は4ページからなっている。
- 6 解答用紙は4枚ある。
- 7 下書き用紙は4枚ある。
- 8 この問題冊子のうち、落丁・乱丁および印刷不鮮明な箇所があれば、手をあげて申し出ること。
- 9 この問題の内容に関する質問には答えない。
- 10 試験開始後60分経過しないと退室できない。退室するときには、解答用紙を机上に置き、問題冊子、下書き用紙は持ち帰ること。

1 a, b を実数とする. 関数 $f(x) = \frac{a^x - b^x}{\sqrt{5}}$ は $f(1) = 1, f(2) = 1$ を満たすとする. 以下の問いに答えよ.

(1) a, b の値を求めよ.

(2) $f(2) + f(3) = f(4)$ が成り立つことを示せ.

(3) x が自然数のとき, $f(x)$ も自然数となることを示せ.

(配点 100 点)

2 O を原点とする xyz 空間内に 2 点 $A(5, 3, -3)$, $B(4, 2, -1)$ をとる. 中心が $C(5, 2, -2)$, 半径が r の球面を S とし, 2 点 A, B を通る直線を ℓ とする. O から 3 点 A, B, C の定める平面に垂線 OH を下ろす. ℓ と S が平面 $z = 1$ で交点 D をもつ. 以下の問いに答えよ.

(1) r の値を求めよ.

(2) $\overrightarrow{CD} = s\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{CB}$ となる実数 s, t の値を求めよ.

(3) 垂線 OH の長さを求めよ.

(4) $\triangle ACD$ の面積を求めよ.

(配点 100 点)

3 a を実数とする. xy 平面上に, 曲線 $C_1: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 曲線 $C_2: y = \frac{x^2}{2} + a$, 次の連立不等式の表す領域 D がある.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \\ y \geq \frac{x^2}{2} - 1 \end{cases}$$

以下の問いに答えよ.

- (1) C_1 と C_2 が共有点をもつとき, a の値の範囲を求めよ.
- (2) C_1 と C_2 の共有点の個数を, a の値によって分類せよ.
- (3) D の面積を求めよ.

(配点 100 点)

4 n を自然数とする. 整数を成分にもつ行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は $AB = BA$, $B^2 - 3B + 2E = O$

を満たすとする. ただし $x \neq y$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $a > b > c > d$, $bc > 0$ かつ $A^2 = 18E$ のとき, a, b, c, d の値をすべて求めよ.

(2) $B^n = p_n B + q_n E$ で定まる数列 $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ.

(3) $a = 3$, $b = 2$, $c = -4$, $d = -3$ のとき, x, y, z の値および $(AB)^{2n}$ を求めよ.

(配点 100 点)