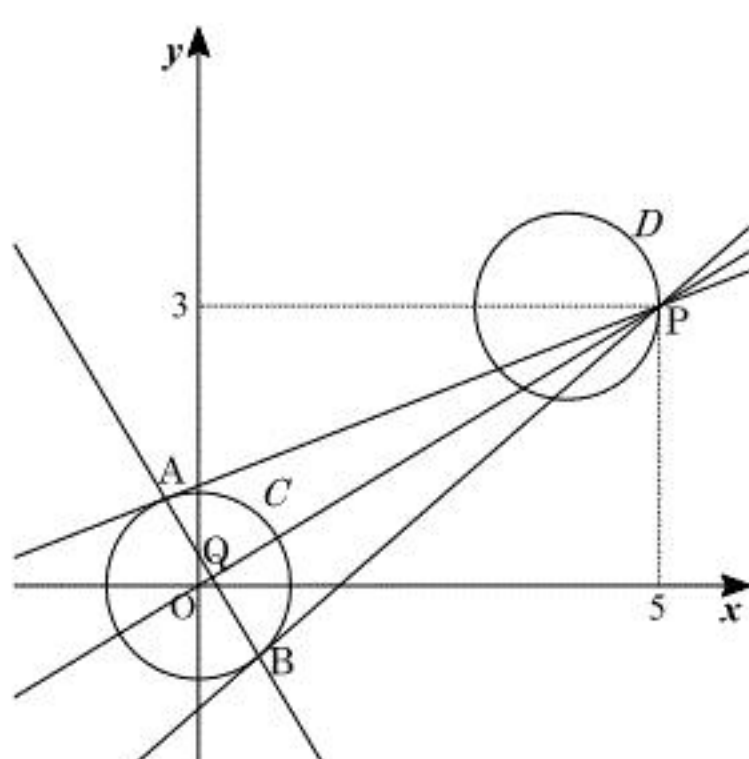




(1)

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ とおくと、点 A, B における接線の方程式はそれぞれ

$$x_1x + y_1y = 1, x_2x + y_2y = 1$$

となる。これが、 $P(5, 3)$ を通ることから、

$$5x_1 + 3y_1 = 1, 5x_2 + 3y_2 = 1$$

が成り立つ。これはつまり、点 A, B が直線 $5x + 3y = 1$ 上にあることを示している。一般に直線は、その直線を通る相異なる 2 点を決めれば、ひとつに決まるので、これが直線 AB の方程式であるとわかる。

(答) $5x + 3y = 1$

(2)

直線 OP の方程式は、

$$3x - 5y = 0$$

であるから、これと直線 AB の方程式 $5x + 3y = 1$ と連立することにより、点 Q の座標は、

$$(x, y) = \left(\frac{5}{34}, \frac{3}{34} \right)$$

となる。

(答) $Q\left(\frac{5}{34}, \frac{3}{34}\right)$

(3)

$P(a, b)$ とおくと、(1)と同様にして、直線 AB 、直線 OP の方程式は

$$\begin{cases} ax + by = 1 \\ bx - ay = 0 \end{cases}$$

と求まる。この連立方程式の解を座標に持つ点が交点 Q であるから、 $Q(X, Y)$ とおくと、

$$\begin{cases} aX + bY = 1 & \dots \textcircled{1} \\ bX - aY = 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

を満たす。これを、 (a, b) について解くと、

$$\textcircled{1} \times X - \textcircled{2} \times Y \text{ より } a(X^2 + Y^2) = X,$$

$$\textcircled{1} \times Y + \textcircled{2} \times X \text{ より } b(X^2 + Y^2) = Y$$

であるから、

$$(a, b) = \left(\frac{X}{X^2 + Y^2}, \frac{Y}{X^2 + Y^2} \right) \dots \textcircled{3}$$

と求まる。ここで、 $P(a, b)$ は円 D

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 1 \dots \textcircled{4}$$

上の点であるから、 $(a-4)^2 + (b-3)^2 = 1$ をみたす。これに③を代入して、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{X}{X^2 + Y^2} - 4 \right)^2 + \left(\frac{Y}{X^2 + Y^2} - 3 \right)^2 = 1 \\ & \Leftrightarrow \frac{X^2 + Y^2}{(X^2 + Y^2)^2} - 8 \cdot \frac{X}{X^2 + Y^2} - 6 \cdot \frac{Y}{X^2 + Y^2} + 24 = 0 \\ & \Leftrightarrow 1 - 8X - 6Y + 24(X^2 + Y^2) = 0 \\ & \Leftrightarrow 24 \left(X - \frac{1}{6} \right)^2 + 24 \left(Y - \frac{1}{8} \right)^2 - \frac{1}{24} = 0 \\ & \therefore \left(X - \frac{1}{6} \right)^2 + \left(Y - \frac{1}{8} \right)^2 = \left(\frac{1}{24} \right)^2 \end{aligned}$$

を得る。以上の変形は同値変形であるから、円

$$\left(x - \frac{1}{6} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{8} \right)^2 = \left(\frac{1}{24} \right)^2 \dots \textcircled{5}$$

上の任意の点 (X, Y) は、③で定まるような、円④上の点 $P(a, b)$ に対応する点 Q になっている。以上により、点 Q の軌跡は点 $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{8} \right)$ を中心とする半径 $\frac{1}{24}$ の円全体となることが示された。

(証明終)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 1 - 2a - 2a \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \\
 &= 2 \cos^2 x - 2a - 2a \cos x - 1 \\
 &= 2 \left(\cos x - \frac{a}{2} \right)^2 - \frac{a^2}{2} - 2a - 1 \quad \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 \leq x < 2\pi$ より、

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。 $\frac{a}{2}$ と $-1, 1$ の位置関係に注意して、次のように場合分けができる。

[1] $\frac{a}{2} < -1$ すなわち $a < -2$ のとき

このとき、 $f(x)$ が最小値をとるのは $\cos x = -1$ となるときであり、その最小値は、

$$2 \left(-1 - \frac{a}{2} \right)^2 - \frac{a^2}{2} - 2a - 1 = 1$$

となるから、この範囲において $f(x)$ の最小値が $\frac{1}{2}$ となることはない。

[2] $-1 \leq \frac{a}{2} < 1$ すなわち $-2 \leq a < 2$ のとき

このとき、 $f(x)$ が最小値をとるのは $\cos x = \frac{a}{2}$ となるときであるから、 $f(x)$ の最小値が

$\frac{1}{2}$ となるのは、

$$-\frac{a^2}{2} - 2a - 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (a+1)(a+3) = 0$$

$$\therefore a = -1 \quad (\because -2 \leq a < 2)$$

のときである。

[3] $1 \leq \frac{a}{2}$ すなわち $2 \leq a$ のとき

このとき、 $f(x)$ が最小値をとるのは $\cos x = 1$ となるときであり、その最小値は、

$$2 \left(1 - \frac{a}{2} \right)^2 - \frac{a^2}{2} - 2a - 1 = 1 - 4a$$

であるが、これが $\frac{1}{2}$ となるのは、

$$1 - 4a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a = \frac{1}{8}$$

のときであり、これは $2 \leq a$ に反するので不適である。

以上、[1], [2], [3] より、 $f(x)$ の最小値が $\frac{1}{2}$ となるのは

$$a = -1$$

のときである。このとき、①より、

$$f(x) = 2 \left(\cos x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}$$

であるから、 $f(x)$ が最大値をとるのは②より $\cos x = 1$ のときであり、その最大値は、

$$2 \left(1 + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} = 5$$

となる。

(答) a の値 -1

最大値 5

(1)

$$\begin{aligned}
 \log_{10} 18^{20} &= 20 \log_{10} 18 \\
 &= 20(\log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3) \\
 &= 20 \cdot 1.2552 \\
 &= 25.104
 \end{aligned}$$

より,

$$10^{25} < 18^{20} < 10^{26}$$

であるから, 18^{20} の桁数は 26 桁である。

(答) 26 桁

(2)

$$\begin{aligned}
 10^{-10} &\leq \left(\frac{4}{15}\right)^n < 10^{-9} \\
 \therefore -10 &\leq \log_{10} \left(\frac{4}{15}\right)^n < -9 \quad \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

である。中項について,

$$\begin{aligned}
 \log_{10} \left(\frac{4}{15}\right)^n &= n \log_{10} \frac{8}{30} \\
 &= n \{3 \log_{10} 2 - (1 + \log_{10} 3)\} \\
 &= -0.5741 \cdot n
 \end{aligned}$$

であるから, ①は,

$$-10 \leq -0.5741 \cdot n < -9 \Leftrightarrow \frac{9}{0.5741} < n \leq \frac{10}{0.5741}$$

となる。ここで,

$$\frac{9}{0.5741} = 15.6\dots, \quad \frac{10}{0.5741} = 17.4$$

であるから, 条件を満たす自然数 n は 16, 17 の 2 つである。

(答) 16, 17

(1)

$$f'(x) = -3x^2 + 1$$

より、求める曲線 C_1 の接線の方程式は、

$$y - 0 = (-3 \cdot 1^2 + 1)(x - 1)$$

$$\therefore y = -2x + 2$$

である。

(答) $y = -2x + 2$

(2)

(1)の結果より、求める曲線 C_2 の接線の傾きは $\frac{1}{2}$ である。また、

$$g'(x) = 3x^2 - 2x$$

より、求める接線と曲線 C_2 の接点の x 座標は、

$$3x^2 - 2x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{2 + \sqrt{10}}{6} \quad (\because x \geq 0)$$

である。よって求める接線の方程式は、

$$y - \left\{ \left(\frac{2 + \sqrt{10}}{6} \right)^3 - \left(\frac{2 + \sqrt{10}}{6} \right)^2 \right\} = \frac{1}{2} \left(x - \frac{2 + \sqrt{10}}{6} \right)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x - \frac{13 + 5\sqrt{10}}{54}$$

となる。

(答) $y = \frac{1}{2}x - \frac{13 + 5\sqrt{10}}{54}$

(3)

$$f(x) = -x(x-1)(x+1) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$g(x) = x^2(x-1) \quad \cdots \textcircled{2}$$

より、 $0 \leq x \leq 1$ の範囲において、

$$f(x) \geq 0$$

$$g(x) \leq 0$$

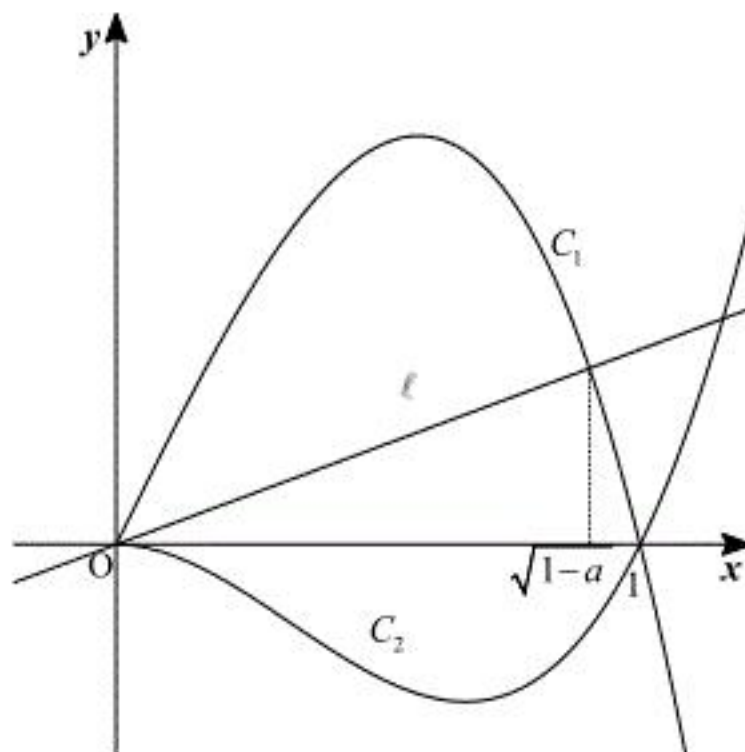
である。よって、

$$f(x) \geq g(x)$$

となる。

(証明終)

(4)



①, ②より、曲線 C_1 と曲線 C_2 の概形は前図のようになる。

よって、曲線 C_1 と x 軸で囲まれた図形の面積を S_1 とおくと、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^1 (-x^3 + x) dx \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となり、また、曲線 C_2 と x 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とおくと、

$$\begin{aligned} S_2 &= -\int_0^1 (x^3 - x^2) dx \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

となる。よって、曲線 C_1 と曲線 C_2 で囲まれた図形の面積を S とおくと、

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{3} \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。ここで、求める直線を ℓ とし、その方程式を $y = ax$ とおくと、 $S_1 \geq S_2$ より、この ℓ が曲線 C_1 と曲線 C_2 で囲まれる図形の面積を二等分するのは、 ℓ が $0 < x < 1$ の範囲において曲線 C_1 と交点をもつときである。ここで、

$$-x^3 + x = ax \Leftrightarrow x\{x^2 - (1-a)\} = 0$$

より、 $0 < x < 1$ の範囲において曲線 C_1 と ℓ が交点を持つのは、

$$0 \leq a < 1 \quad \cdots \textcircled{4}$$

のときであり、このときの曲線 C_1 と ℓ の交点の x 座標は、

$$x = 0, \sqrt{1-a} \quad (\because x \geq 0)$$

となる。よって曲線 C_1 と ℓ で囲まれる図形の面積を S_3 とおくと、

$$\begin{aligned} S_3 &= \int_0^{\sqrt{1-a}} \{(-x^3 + x) - ax\} dx \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{1-a}{2}x^2 \right]_0^{\sqrt{1-a}} \\ &= \frac{(1-a)^2}{4} \end{aligned}$$

であるから、 ℓ が曲線 C_1 と曲線 C_2 で囲まれる図形の面積を二等分する a の条件は、

$$S_3 = \frac{1}{2}S$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-a)^2}{4} = \frac{1}{6} \quad (\because \textcircled{3})$$

$$\Leftrightarrow 1-a = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (\because \textcircled{4} \text{より } 1-a > 0)$$

$$\therefore a = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$$

となる。よって、求める直線 ℓ の方程式は、

$$y = \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3} \right) x$$

である。

(答) $y = \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3} \right) x$