

(1)

背理法を用いて

命題「 $\sqrt[3]{7}$ は無理数である」 $\cdots (*)$

を証明する。命題 $(*)$ の否定、つまり、 $\sqrt[3]{7}$ は有理数であると仮定すると、 m, n を互いに素な自然数として

$$\sqrt[3]{7} = \frac{m}{n}$$

とかける。これより、

$$7n^3 = m^3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。 $\textcircled{1}$ の左辺は7を約数に持っているため、右辺も7を約数に持たなければならず、

$$m = 7m' \quad (m' \text{は整数}) \quad \cdots \textcircled{2}$$

とおける。このとき、 $\textcircled{1}$ より

$$n^3 = 7^2 m'^3 \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。 $\textcircled{3}$ の右辺は7を約数に持っているため、左辺も7を約数に持たなければならず、

$$n = 7n' \quad (n' \text{は整数}) \quad \cdots \textcircled{4}$$

とおける。 $\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{4}$ より m, n はともに7を約数に持つことになり、これは m, n が互いに素であることに反し、不合理。したがって、仮定は誤りであり、 $\sqrt[3]{7}$ は有理数でない。つまり、 $\sqrt[3]{7}$ は無理数であるため、命題 $(*)$ は示された。

(証明終)

(2)

背理法を用いて

命題「 $\sqrt{11} - \sqrt{7}$ は無理数である」 $\cdots (**)$

を証明する。命題 $(**)$ の否定、つまり、 $\sqrt{11} - \sqrt{7}$ は有理数であると仮定すると、

$$\begin{aligned} (\sqrt{11} - \sqrt{7})(\sqrt{11} + \sqrt{7}) &= 4 \\ \Leftrightarrow \sqrt{11} + \sqrt{7} &= \frac{4}{\sqrt{11} - \sqrt{7}} \end{aligned}$$

であることから、有理数は体であるため $\sqrt{11} + \sqrt{7}$ も有理数となる。このとき

$$\sqrt{7} = \frac{1}{2} \{ (\sqrt{11} + \sqrt{7}) - (\sqrt{11} - \sqrt{7}) \}$$

となるが、この式は左辺は無理数、右辺は有理数であり、不合理。したがって、仮定は誤りであり、 $\sqrt{11} - \sqrt{7}$ は有理数でない。つまり、 $\sqrt{11} - \sqrt{7}$ は無理数であるため、命題 $(**)$ は示された。

(証明終)

(3)

$k \in \mathbb{N}$ であることから $k > 0$ である。したがって、

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \\ \Leftrightarrow k^2 &= l^2 + m^2 + n^2 \quad \cdots \textcircled{5} \end{aligned}$$

である。ここで、 $a \in \mathbb{N}$ について

$$\begin{aligned} (2a)^2 &= 4a^2 \equiv 0 \pmod{4} \\ (2a-1)^2 &= 4a^2 - 4a + 1 \equiv 1 \pmod{4} \end{aligned}$$

となる。つまり、 $p \in \mathbb{N}$ について

$$\begin{aligned} p \equiv 0 \pmod{2} &\Leftrightarrow p^2 \equiv 0 \pmod{4} \\ p \equiv 1 \pmod{2} &\Leftrightarrow p^2 \equiv 1 \pmod{4} \end{aligned}$$

である。これより、 l, m, n のうち奇数であるものの個数を x とすると、

$$l^2 + m^2 + n^2 \equiv x \pmod{4}$$

となる。 $k^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$ より、 $\textcircled{5}$ が成り立つのは $x = 0, 1$ のときである。よって、 l, m, n のうち奇数の個数は0または1、つまり、少なくとも2つは偶数であることが示された。

(証明終)

(1)

$\overline{AB}=(1, 2, 0), \overline{AC}=(1, 0, 1)$ の張る平面 α に垂直な単位ベクトルを $\vec{n}=(x, y, z)$ とおくと

$$|\vec{n}|=1 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

であり、また

$$\overline{AB} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow x+2y=0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\overline{AC} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow x+z=0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。①, ②, ③より

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 + \left(-\frac{x}{2}\right)^2 + (-x)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 9x^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow x &= \pm \frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。これと②, ③より、求める単位ベクトル $\vec{n}$ は

$$\vec{n}=(x, y, z)=\left(\pm \frac{2}{3}, \mp \frac{1}{3}, \mp \frac{2}{3}\right) \text{ (複号同順)}$$

となる。

$$\text{(答)} \left(\pm \frac{2}{3}, \mp \frac{1}{3}, \mp \frac{2}{3}\right) \text{ (複号同順)}$$

(2)

F 上の点 P について、 P, H はともに平面 α 上の点であり、 $DH \perp \alpha$ であるため、 $PH \perp DH$ である。よって、三平方の定理より

$$HP^2 = DP^2 - DH^2 \quad \cdots \textcircled{4}$$

が成り立つが、 DP は球面 S の半径、 DH は定数であるため、 HP の長さは一定となる。したがって、点 P, H はともに平面 α 上の点であり、点 P は定点 H と一定の距離に存在する点であるので、その軌跡である F は H を中心とした円である。

(証明終)

(3)

(2)より F の中心は H であり、 $DH \perp \alpha$ であるため $\overline{DH} \parallel \vec{n}$ である。よって(1)より、 $k \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\overline{DH} = k \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right)$$

とおける。このとき

$$\begin{aligned} \overline{CH} &= \overline{CD} + \overline{DH} \\ &= \left(\frac{2}{3}k, -\frac{1}{3}k, 1 - \frac{2}{3}k \right) \end{aligned}$$

であり、 $\overline{CH} \perp \vec{n}$ より

$$\begin{aligned} \overline{CH} \cdot \vec{n} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}k + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}k\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{3}k\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 9k - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \overline{OH} &= \overline{OD} + \overline{DH} \\ &= \left(\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{14}{9} \right) \end{aligned}$$

である。また、 $|\overline{DH}| = \frac{2}{3}|\vec{n}| = \frac{2}{3}$ であり、 DP は球面 S の半径であることより $DP=2$ が成り立つため、④より F の半径である HP は

$$\begin{aligned} HP &= \sqrt{DP^2 - DH^2} \\ &= \sqrt{2^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

である。以上より、 F の半径は $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 、中心は $\left(\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{14}{9}\right)$ である。

(4)

球面 S は中心 $D(0, 0, 2)$ 、半径 $DP=2$ であるから

$$S: x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$$

とかける。よって、 $P(X, Y, Z)$ とおくと

$$X^2 + Y^2 + (Z-2)^2 = 4 \quad \cdots \textcircled{5}$$

が成り立つ。 $DH \perp HP, \overline{DH} \parallel \vec{n}$ より

$$\begin{aligned} \overline{HP} \cdot \vec{n} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(X - \frac{4}{9}\right) \cdot \frac{2}{3} + \left(Y + \frac{2}{9}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(Z - \frac{14}{9}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2X - Y - 2Z + 2 &= 0 \quad \cdots \textcircled{6} \end{aligned}$$

となる。ここで、実数 $m(>0)$ を用いて $\overrightarrow{EQ} = m\overrightarrow{EP}$ とかけるため

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EQ} \\ &= (mX, mY, 4 + m(Z-4)) \end{aligned}$$

となり、 $Q(s, t, 0)$ のとき

$$\begin{aligned} s &= mX, t = mY, 0 = 4 + m(Z-4) \\ \therefore X &= \frac{s}{m}, Y = \frac{t}{m}, Z = 4 - \frac{4}{m} \end{aligned}$$

である。⑤より

$$\begin{aligned} \left(\frac{s}{m}\right)^2 + \left(\frac{t}{m}\right)^2 + \left\{\left(4 - \frac{4}{m}\right) - 2\right\}^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow s^2 + t^2 + (2m-4)^2 &= 4m^2 \\ \Leftrightarrow s^2 + t^2 - 16m + 16 &= 0 \quad \cdots \textcircled{7} \end{aligned}$$

となり、⑥より

$$\begin{aligned} 2\frac{s}{m} - \frac{t}{m} - 2\left(4 - \frac{4}{m}\right) + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2s - t - 6m + 8 &= 0 \quad \cdots \textcircled{8} \end{aligned}$$

となる。⑦, ⑧より

$$\begin{aligned} s^2 + t^2 - \frac{8}{3}(2s - t + 8) + 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow s^2 + t^2 - \frac{16}{3}s + \frac{8}{3}t - \frac{16}{3} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(s - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(t + \frac{4}{3}\right)^2 &= \frac{128}{9} \end{aligned}$$

が得られ、これが s, t が満たす方程式である。

$$\text{(答)} \left(s - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(t + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{128}{9}$$

3

(1)

[1] $-1 \leq x < 0$ のとき

$$2x\sqrt{1-x^2} \geq x$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{1-x^2} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 4(1-x^2) \geq 1 \quad (\because 1-x^2 \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow 3 \geq 4x^2$$

$$\therefore -1 \leq x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

[2] $0 < x \leq 1$ のとき

$$2x\sqrt{1-x^2} \geq x$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{1-x^2} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 4(1-x^2) \geq 1 \quad (\because 1-x^2 \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow 3 \geq 4x^2$$

$$\therefore 0 < x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

[3] $x = 0$ のとき

$$2x\sqrt{1-x^2} = 0, x = 0 \text{ より, 与式は成立する。}$$

以上[1], [2], [3]の結果を合わせると, $-1 \leq x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ が解となる。

$$(\text{答}) -1 \leq x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2)

$0 \leq a < 1$ であるもとで, $f(x) = 1 + x\sqrt{1-x^2}, g(x) = 1 + ax$ とおくと, 曲線 $C: y = f(x)$, 直線 $l: y = g(x)$ となる。このとき, $1-x^2 \geq 0$, つまり, $-1 \leq x \leq 1$ において $f(x)$ は定義される。ここで,

$$f(0) = g(0) = 1$$

である。また

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (1 + x\sqrt{1-x^2}) - (1 + ax) \\ &= x(\sqrt{1-x^2} - a) \end{aligned}$$

である。ここで

$$\sqrt{1-x^2} - a > 0$$

$$\Leftrightarrow 1-x^2 > a^2 \quad (\because 1-x^2 \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow x^2 < 1-a^2$$

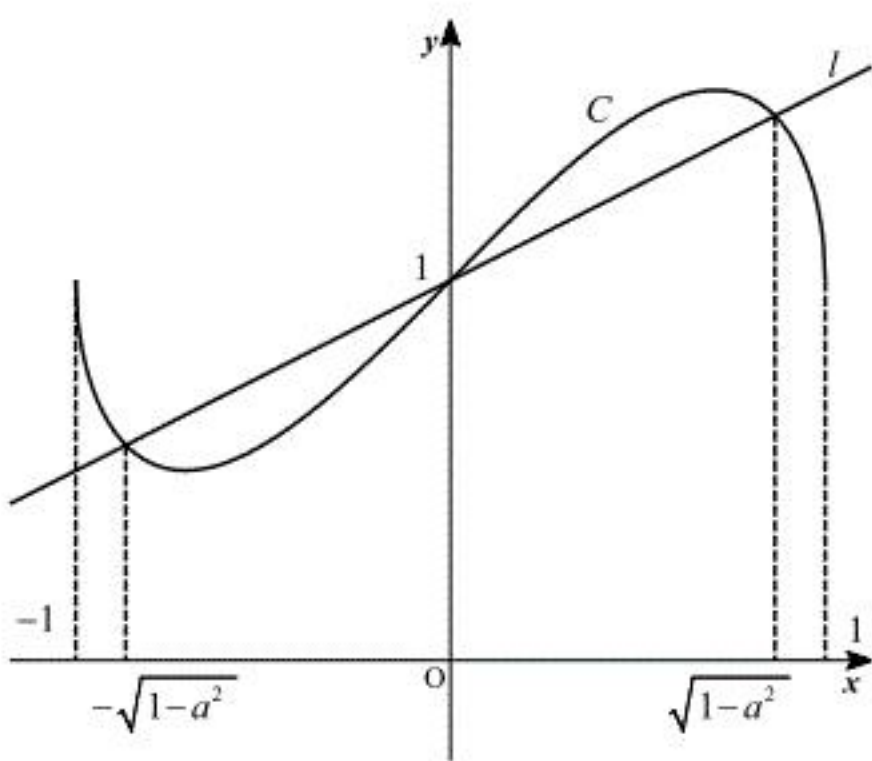
$$\Leftrightarrow -\sqrt{1-a^2} < x < \sqrt{1-a^2} \quad (\because 1-a^2 \geq 0)$$

であることより,

$$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow -1 \leq x < -\sqrt{1-a^2}, 0 \leq x < \sqrt{1-a^2}$$

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow -\sqrt{1-a^2} < x < 0, \sqrt{1-a^2} < x \leq 1$$

となる。したがって, 曲線 C と直線 l の位置関係は下図のようになる。



C と l で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 $V(a)$ は

$$V(a) = \int_{-\sqrt{1-a^2}}^0 \pi \left[\{g(x)\}^2 - \{f(x)\}^2 \right] dx + \int_0^{\sqrt{1-a^2}} \pi \left[\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2 \right] dx$$

となる。ここで, $\alpha = \sqrt{1-a^2}, h(x) = \{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2$ とおくと

$$\begin{aligned} h(x) &= (1 + x\sqrt{1-x^2})^2 - (1 + ax)^2 \\ &= -x^4 + (1-a^2)x^2 + 2x\sqrt{1-x^2} - 2ax \end{aligned}$$

$$\int h(x) dx = -\frac{x^5}{5} + \frac{1-a^2}{3}x^3 - \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - ax^2 + C'$$

となる。ただし, C' は積分定数である。よって,

$$\begin{aligned} V(a) &= \pi \int_{-\alpha}^0 \{-h(x)\} dx + \pi \int_0^{\alpha} h(x) dx \\ &= \pi \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{1-a^2}{3}x^3 - \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - ax^2 \right]_{-\alpha}^0 \\ &\quad + \pi \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{1-a^2}{3}x^3 - \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - ax^2 \right]_0^{\alpha} \\ &= 2\pi \left\{ \frac{2}{3} - a\alpha^2 - \frac{2}{3}(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}} \right\} \\ &= \frac{2\pi}{3}(a^3 - 3a + 2) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) V(a) = \frac{2\pi}{3}(a^3 - 3a + 2)$$

(3)

$$\begin{aligned} M_n &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n V\left(\frac{k}{2n}\right) \\ &= \frac{\pi}{3n} \sum_{k=1}^n \left\{ \left(\frac{k}{2n}\right)^3 - 3 \cdot \frac{k}{2n} + 2 \right\} \\ &= \frac{\pi}{3n} \left[\frac{1}{8n^3} \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 - \frac{3}{2n} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + 2n \right] \\ &= \pi \left\{ \frac{1}{96} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{2}{3} \right\} \end{aligned}$$

であることから,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} M_n &= \pi \left(\frac{1}{96} - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \right) \\ &= \frac{41}{96} \pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \frac{41}{96} \pi$$

(1)

$B = \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix}$ について、 B^2 が単位行列であるため

$$\begin{aligned} B^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p^2+q^2 & q(p+r) \\ q(p+r) & q^2+r^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow p^2+q^2=1, q(p+r)=0, q^2+r^2=1 &\quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} q(p+r) &= 0 \\ \Leftrightarrow q=0, p+r=0 \end{aligned}$$

[1] $q=0$ のとき

①より、 $p^2=r^2=1$ 、つまり、 $p \neq 0, r \neq 0$ である。

$$\begin{aligned} BAB &= \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ap^2 & bpr \\ bpr & cr^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるが、 $b \neq 0$ より、 $bpr \neq 0$ となることから、 BAB が対角行列とはならない。

[2] $q \neq 0$ のとき

①より、

$$\begin{aligned} p+r &= 0 \\ \Leftrightarrow r &= -p \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} BAB &= \begin{pmatrix} p & q \\ q & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ q & -p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ap^2+2bpq+cq^2 & (a-c)pq+b(q^2-p^2) \\ (a-c)pq+b(q^2-p^2) & aq^2-2bpq+cp^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり、これが対角行列となるとき、

$$(a-c)pq+b(q^2-p^2)=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となる。

$$\begin{aligned} (a-c)pq+b(q^2-p^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow bp^2-(a-c)pq-bq^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow b\left(\frac{p}{q}\right)^2-(a-c)\frac{p}{q}-b &= 0 \quad (q \neq 0) \end{aligned}$$

であり、 $t = \frac{p}{q}$ とおくと

$$bt^2-(a-c)t-b=0$$

となる。 a, b, c は 0 ではない実数であることから、この t についての 2 次方程式の解の判別式を D とすると

$$D=(a-c)^2+4b^2>0$$

となる。よって、 t は実数である。このもとで、 $t = \frac{p}{q}$ と①より

$$\begin{aligned} (t^2+1)q^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow q^2 &= \frac{1}{t^2+1} \end{aligned}$$

である。これより $q^2 > 0$ が分かるため、 q は実数である。さらに、 $t = \frac{p}{q}$ より p は実数、

加えて $r = -p$ より r も実数である。

以上より、条件を満たす行列 B の成分はすべて実数であることが示された。

(証明終)

(2)

$a = \frac{5}{8}, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{3}$ のとき、②より

$$\begin{aligned} \frac{7}{24}pq - \frac{1}{2}(q^2-p^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 12p^2+7pq-12q^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (4p-3q)(3p+4q) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4p-3q=0, 3p+4q &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $p^2+q^2=1$ であることから、

$$4p-3q=0 \text{ のとき、 } p=\pm\frac{3}{5}, q=\pm\frac{4}{5} \quad (\text{複号同順})$$

$$3p+4q=0 \text{ のとき、 } p=\pm\frac{4}{5}, q=\mp\frac{3}{5} \quad (\text{複号同順})$$

となる。ここで、 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ は B には依存しないため、 B についてはここで得られた 4 通

りのうちの 1 つについて考えれば十分である。 $B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{aligned} BAB &= \frac{1}{5^2} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{24} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。 $\alpha = -\frac{1}{24}$ とおくと

$$BAB = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とかける。また、単位行列を E として $B^2 = E$ であるため

$$\begin{aligned} (BAB)^n &= (BAB)(BAB)\cdots(BAB) \\ &= BA^nB \end{aligned}$$

となる。以上より

$$\begin{aligned} BA^nB &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。 $B^2 = E$ より $B^{-1} = B$ となることから

$$A^n = B \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= B \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5^2} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5^2} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^n \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3\alpha^n \\ 4\alpha^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。 $|\alpha| = \frac{1}{24} < 1$ であることから $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0$ となる。したがって

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3\alpha^n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} 4\alpha^n = 0 \end{aligned}$$

となり、題意は示された。

(証明終)