

平成25年度 前期日程
入学者選抜学力検査問題

環境・情報科学科
数 学

〔注 意〕

- 1 机上に受験票を提示しておくこと。
- 2 監督者の指示があるまで、この問題冊子を開いてはいけない。
- 3 解答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。
- 4 解答用紙に受験番号および氏名を必ず記入すること。
- 5 この冊子の問題は4ページからなっている。
- 6 解答用紙は4枚ある。
- 7 下書き用紙は4枚ある。
- 8 この問題冊子のうち、落丁・乱丁および印刷不鮮明な箇所があれば、手をあげて申し出ること。
- 9 この問題の内容に関する質問には答えない。
- 10 試験開始後60分経過しないと退室できない。退室するときには、解答用紙を机上に置き、問題冊子、下書き用紙は持ち帰ること。

1 以下の問いに答えよ.

- (1) $\sqrt[3]{7}$ が無理数であることを証明せよ.
- (2) $\sqrt{7}$ が無理数であることを用いて, $\sqrt{11} - \sqrt{7}$ が無理数であることを証明せよ.
- (3) k, l, m, n は $k = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$ を満たす自然数とする. このとき, l, m, n のうち少なくとも2つが偶数であることを証明せよ.

(配点 100 点)

- 2 O を原点とする xyz 空間内に 5 点 $A(-1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 1)$, $D(0, 0, 2)$, $E(0, 0, 4)$ をとる. 中心が D , 半径が 2 の球面を S とし, 3 点 A, B, C の定める平面を α とする. S が α と交わってできる図形を F とする. D から α に垂線 DH を下ろす. 以下の問いに答えよ.

- (1) α に垂直な単位ベクトルをすべて求めよ.
- (2) F は H を中心とする円であることを示せ.
- (3) F の半径と中心の座標を求めよ.
- (4) 点 P は F 上を動く点とし, 直線 EP と xy 平面との交点を $Q(s, t, 0)$ とする. このとき, s, t が満たす方程式を求めよ.

(配点 100 点)

- 3 $0 \leq a < 1$ とする. xy 平面上の曲線 C を $y = 1 + x\sqrt{1-x^2}$ で, 直線 ℓ を $y = 1 + ax$ で定める. C と ℓ で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を a の関数と考えて $V(a)$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $-1 \leq x \leq 1$ とするとき, 不等式 $2x\sqrt{1-x^2} \geq x$ を解け.

(2) $V(a)$ を a を用いて多項式で表せ.

(3) $M_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n V\left(\frac{k}{2n}\right)$ とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ を求めよ.

(配点 100 点)

4 a, b, c は 0 でない実数とする. 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) BAB は対角行列, かつ, B^2 は単位行列とするとき, $B = \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix}$ の成分はすべて実数であることを示せ.

(2) $a = \frac{5}{8}, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{3}$ とする. 自然数 n に対して $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ とする. このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ を示せ.

(配点 100 点)