

(1)

$$\begin{aligned}
 \vec{c} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} \\
 &= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \\
 &= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}
 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 |\vec{c}|^2 &= \left| \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} \right|^2 \\
 \Leftrightarrow |\vec{c}|^2 &= \frac{1}{9}|\vec{a}|^2 + \frac{4}{9}|\vec{b}|^2 + \frac{4}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} \\
 \Leftrightarrow 9|\vec{c}|^2 &= |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b}
 \end{aligned}$$

であり、また

$$\begin{aligned}
 |\overrightarrow{AB}|^2 &= |\vec{b} - \vec{a}|^2 \\
 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}
 \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}
 3|\vec{a}|^2 + 6|\vec{b}|^2 - 9|\vec{c}|^2 &= 3|\vec{a}|^2 + 6|\vec{b}|^2 - (|\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b}) \\
 &= 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} \\
 &= 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}) \\
 &= 2|\overrightarrow{AB}|^2
 \end{aligned}$$

となるから、題意は示された。

(証明終)

(2)

点Gは直線AD上にあるから、実数 s を用いて

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AG} &= s\overrightarrow{AD} \\
 &= s(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) \\
 &= s(-\vec{a} + t\vec{b}) \\
 &= -s\vec{a} + st\vec{b}
 \end{aligned}$$

とかける。また点Gは直線OC上にあるから、実数 k を用いて

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} \\
 &= k\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \\
 &= k\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) - \vec{a} \\
 &= \left(\frac{k}{3} - 1\right)\vec{a} + \frac{2k}{3}\vec{b}
 \end{aligned}$$

とかける。ここで、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は互いに平行でない、かつ $\vec{0}$ でない2つのベクトルであるから、係数比較を行うことにより

$$\begin{cases} -s = \frac{k}{3} - 1 \\ st = \frac{2k}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{2}{t+2} \\ k = \frac{3t}{t+2} \end{cases}$$

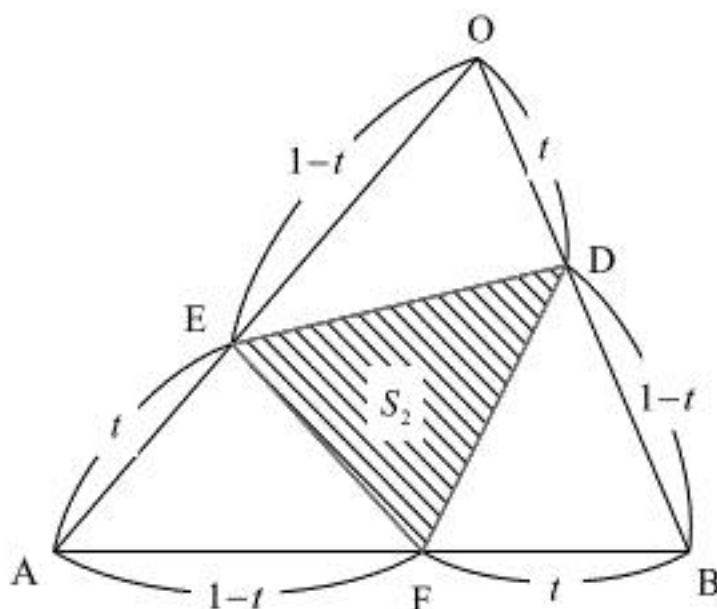
となる。よって、

$$\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{2+t}\vec{a} + \frac{2t}{2+t}\vec{b}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AG} = -\frac{2}{2+t}\vec{a} + \frac{2t}{2+t}\vec{b}$$

(3)



$$\begin{aligned}
 S_2 &= S_1 - \triangle OED - \triangle EAF - \triangle BDF \\
 &= S_1 - t(1-t)S_1 - t(1-t)S_1 - t(1-t)S_1 \\
 &= (3t^2 - 3t + 1)S_1
 \end{aligned}$$

である。よって

$$\frac{S_2}{S_1} = 3t^2 - 3t + 1$$

となる。ここで

$$f(t) = 3t^2 - 3t + 1$$

とおくと

$$f(t) = 3\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

である。よって、 $0 < t < 1$ のとき、 $\frac{S_2}{S_1} (= f(t))$ は $t = \frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{1}{4}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \frac{S_2}{S_1} = 3t^2 - 3t + 1, \text{ 最小値 } \frac{1}{4} \left(t = \frac{1}{2} \text{ のとき} \right)$$

(1)

$f(x)=2x^2+1$ とおく。このとき、 $C_1:y=f(x)$ であり

$$f'(x)=4x$$

であることから、 x 座標が t である C_1 上の点Pにおける接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t) + f(t) \\ &= 4t(x-t) + 2t^2 + 1 \\ &= 4tx - 2t^2 + 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = 4tx - 2t^2 + 1$$

(2)

(1)で定義された点Pにおける C_1 の接線が $C_2:y=-\sqrt{2}(x+a)^2+1$ にも接するとき、 x の方程式

$$\begin{aligned} -\sqrt{2}(x+a)^2+1 &= 4tx - 2t^2 + 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2}x^2 + (2\sqrt{2}a+4t)x - (2t^2 - \sqrt{2}a^2) &= 0 \end{aligned}$$

が重解をもち、この方程式の判別式を D とすると $D=0$ となる。

$$\begin{aligned} D &= (2\sqrt{2}a+4t)^2 - 4\sqrt{2}(2t^2 - \sqrt{2}a^2) \\ &= (16+8\sqrt{2})t^2 + 16\sqrt{2}at \\ &= 8\sqrt{2}t\{(\sqrt{2}+1)t+2a\} \end{aligned}$$

であるから、 $D=0$ となるのは

$$t=0, -\frac{2}{\sqrt{2}+1}a \quad \dots \textcircled{1}$$

のときである。ここで、 a は正の実数であるから、 $0 \neq -\frac{2}{\sqrt{2}+1}a$ であり、条件を満たす値は

2つ存在することがわかる。さらに、1つの t の値に対して C_1, C_2 の共通接線が1本引けるから、 C_1, C_2 の共通接線はちょうど2本存在することが示された。

(証明終)

(3)

①より2つの共通接線を l_1, l_2 とおくと、その方程式は

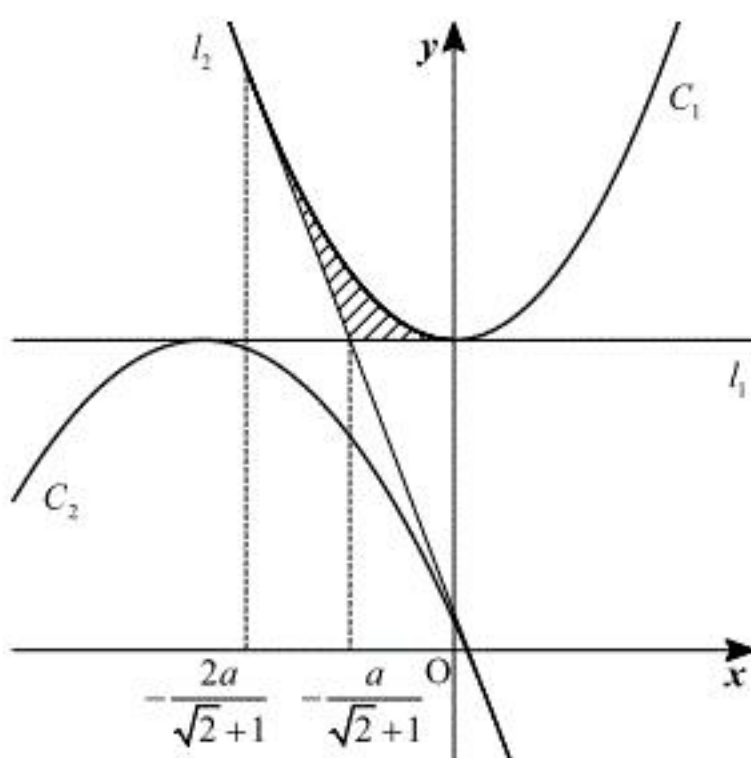
$$l_1:y=1$$

$$l_2:y=-\frac{8a}{\sqrt{2}+1}x-2\left(\frac{2a}{\sqrt{2}+1}\right)^2+1$$

である。 l_1, l_2 の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} 1 &= -\frac{8a}{\sqrt{2}+1}x - 2\left(\frac{2a}{\sqrt{2}+1}\right)^2 + 1 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{a}{\sqrt{2}+1} \end{aligned}$$

であるから、 C_1, C_2 とその共通接線の位置関係は下図のようになる。



求める面積は上図斜線部の面積であり、これを S とする。 C_1, l_1 と直線 $x=-\frac{2a}{\sqrt{2}+1}$ とで囲ま

れた部分の面積を S_1 、 l_1, l_2 と直線 $x=-\frac{2a}{\sqrt{2}+1}$ とで囲まれた部分の面積を S_2 とおくと

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-\frac{2a}{\sqrt{2}+1}}^0 \{(2x^2+1)-1\} dx \\ &= \int_{-\frac{2a}{\sqrt{2}+1}}^0 2x^2 dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 \right]_{-\frac{2a}{\sqrt{2}+1}}^0 \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{8a^3}{(\sqrt{2}+1)^3} \\ S_2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}+1} \cdot \left\{ \left(2\left(-\frac{2a}{\sqrt{2}+1}\right)^2 + 1 \right) - 1 \right\} \\ &= \frac{4a^3}{(\sqrt{2}+1)^3} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} S &= S_1 - S_2 \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{8a^3}{(\sqrt{2}+1)^3} - \frac{4a^3}{(\sqrt{2}+1)^3} \\ &= \frac{4a^3}{3(\sqrt{2}+1)^3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{4a^3}{3(\sqrt{2}+1)^3}$$

(1)

サイコロを3回投げて $(x_0, y_0) = (0, 9)$ となるのは、出る目の組み合わせが

$$(1, 3, 5), (3, 3, 3)$$

となるときである。出る目の組み合わせが $(1, 3, 5)$ のとき出る順列は $3! = 6$ (通り)、 $(3, 3, 3)$ のとき出る順列は 1 (通り) であるから、求める確率は

$$\frac{6+1}{6^3} = \frac{7}{216}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{7}{216}$$

(2)

$y_0 = 0$ であるから、サイコロの出る目は全て偶数である。全ての出る目が2であるとき $x_0 = 2n$ となるから、 $x_0 = 2n+2$ となるのは4の目が1回、2の目が $n-1$ 回出る場合である。この目の出る順列は ${}_nC_1 = n$ (通り) であるから、求める確率は、

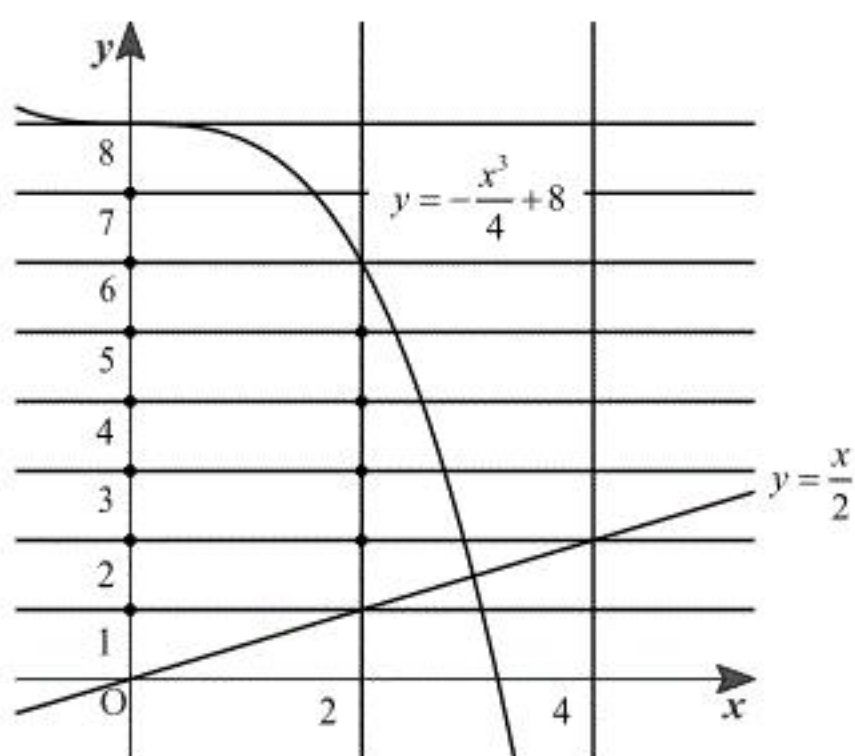
$$\frac{n}{6^n}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{n}{6^n}$$

(3)

$x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ かつ $\frac{x}{2} < y < -\frac{x^3}{4} + 8$ の表す領域に含まれる格子点のうち、点 $P(x_0, y_0)$ が到達しうるものについて、 x_0 は偶数となることに注意すると、以下の図の黒点のようになる。



これらの格子点にたどりつくような2回のサイコロの目の出方の順列は

$$(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (5, 1), (5, 2)$$

の10通りがある。よって、求める確率は、

$$\frac{10}{6^2} = \frac{5}{18}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{5}{18}$$

(4)

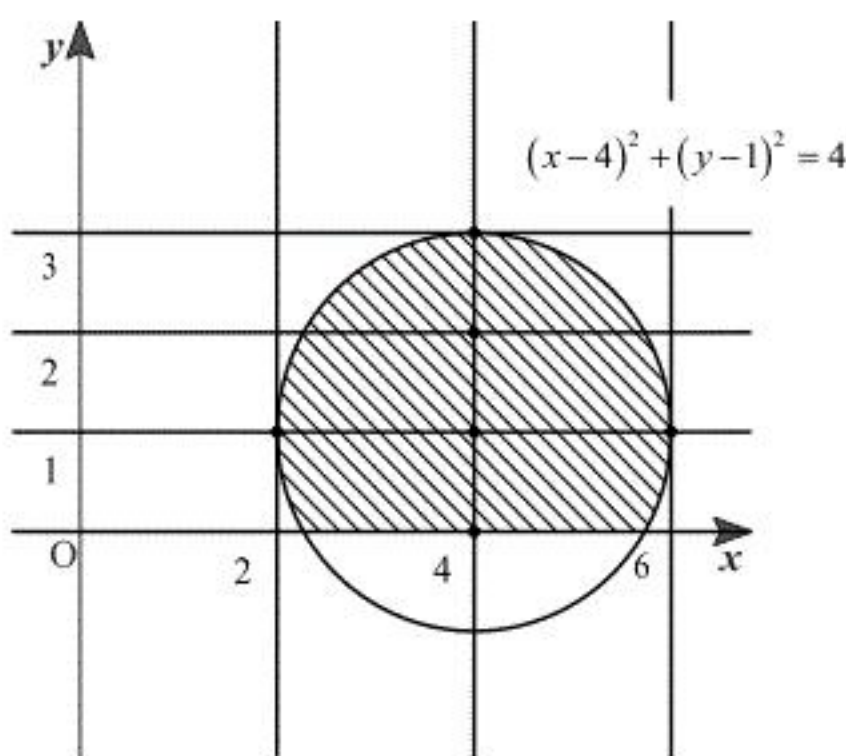
$x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ かつ $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 13 \leq 0$ の表す領域に含まれる格子点のうち、点 $P(x_0, y_0)$ が到達しうるものについて、 x_0 は偶数となること、および

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 13 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-1)^2 - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-1)^2 \leq 4$$

であることに注意すると、以下の図の黒点のようになる。



これらの格子点にたどりつくような2回のサイコロの目の出方の順列は

$$(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (6, 1)$$

の9通りがある。よって、点 (x_0, y_0) が $x_0^2 + y_0^2 - 8x_0 - 2y_0 + 13 \leq 0$ の表す領域に存在する確率は

$$\frac{9}{6^2} = \frac{1}{4}$$

である。求める確率は、この余事象の確率であるから

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{3}{4}$$