

(1)

 $n=2, 3, 4, \dots$ に対して

$$a_n > 0 \text{ かつ } b_n > 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となることを数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=2$ のとき

$$\begin{aligned} a_2 &= (p+q)a_1 + pb_1 \\ &= (p+q) \cdot 0 + p \cdot 1 \\ &= p \\ b_2 &= pa_1 + qb_1 \\ &= p \cdot 0 + q \cdot 1 \\ &= q \end{aligned}$$

であり、 p, q は自然数であることより、 $a_2 > 0, b_2 > 0$ となり、 $\textcircled{1}$ は成り立つ。[2] $n=k$ (k は 2 以上の自然数) のとき $\textcircled{1}$ が成り立つと仮定するこのとき $a_k > 0, b_k > 0$ が成り立ち、 p, q は自然数であることより

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (p+q)a_k + pb_k > 0 \\ b_{k+1} &= pa_k + qb_k > 0 \end{aligned}$$

となり、 $n=k+1$ のときも $\textcircled{1}$ は成り立つ。以上[1], [2]より、2 以上の自然数 n に対して $a_n > 0$ かつ $b_n > 0$ となることが示された。

(証明終)

(2)

 $c_n = \alpha a_n + b_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$), $d_n = -a_n + \alpha b_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) とおくと、 $n=1, 2, 3, \dots$ に対して

$$c_n = (p\alpha + q)^{n-1} \text{ かつ } d_n = \alpha(p\beta + q)^{n-1} \quad \cdots \textcircled{2}$$

となることを数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき

$$\begin{aligned} c_1 &= \alpha a_1 + b_1 \\ &= \alpha \cdot 0 + 1 \\ &= 1 \\ d_1 &= -a_1 + \alpha b_1 \\ &= -0 + \alpha \cdot 1 \\ &= \alpha \end{aligned}$$

となり、 $\textcircled{2}$ に $n=1$ を代入した値と一致し、 $\textcircled{2}$ が成り立つことが分かる。[2] $n=k$ (k は 1 以上の自然数) のとき $\textcircled{2}$ が成り立つと仮定するこのとき $c_k = (p\alpha + q)^{k-1}$, $d_k = \alpha(p\beta + q)^{k-1}$, つまり

$$\alpha a_k + b_k = (p\alpha + q)^{k-1}, \quad -a_k + \alpha b_k = \alpha(p\beta + q)^{k-1}$$

が成り立つ。また α, β は $x^2 - x - 1 = 0$ の解であるから

$$\alpha^2 = \alpha + 1, \quad \beta^2 = \beta + 1$$

であり、また、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -1$$

である。これらを用いると、

$$\begin{aligned} \alpha a_{k+1} + b_{k+1} &= \alpha((p+q)a_k + pb_k) + (pa_k + qb_k) \\ &= p(\alpha+1)a_k + p\alpha b_k + q(\alpha a_k + b_k) \\ &= p\alpha^2 a_k + p\alpha b_k + q(\alpha a_k + b_k) \\ &= p\alpha(\alpha a_k + b_k) + q(\alpha a_k + b_k) \\ &= (p\alpha + q)(\alpha a_k + b_k) \\ &= (p\alpha + q)(p\alpha + q)^{k-1} \\ &= (\alpha p + q)^k \\ -a_{k+1} + \alpha b_{k+1} &= -((p+q)a_k + pb_k) + \alpha(pa_k + qb_k) \\ &= (p\alpha - p - q)a_k + (-p + q\alpha)b_k \\ &= q(-a_k + \alpha b_k) + p(\alpha - 1)a_k - pb_k \\ &= q(-a_k + \alpha b_k) - p\beta a_k - pb_k \\ &= q(-a_k + \alpha b_k) + p\beta\left(-a_k - \frac{1}{\beta}b_k\right) \\ &= q(-a_k + \alpha b_k) + p\beta(-a_k + \alpha b_k)\left(\because \alpha\beta = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} = -\alpha\right) \\ &= (q + p\beta)(-a_k + \alpha b_k) \\ &= (q + p\beta) \cdot \alpha(p\beta + q)^{k-1} \\ &= \alpha(p\beta + q)^k \end{aligned}$$

より、 $n=k+1$ のときも $\textcircled{2}$ が成り立つ。以上[1], [2]より、自然数 n に対して $c_n = (p\alpha + q)^{n-1}$ かつ $d_n = \alpha(p\beta + q)^{n-1}$ となることが示された。

(証明終)

(3)

 $c_n = \alpha a_n + b_n$, $d_n = -a_n + \alpha b_n$ より

$$\begin{aligned} \alpha c_n - d_n &= (\alpha^2 + 1)a_n \\ c_n + \alpha d_n &= (\alpha^2 + 1)b_n \end{aligned}$$

となり、また(2)の結果より、 $c_n = (p\alpha + q)^{n-1}$, $d_n = \alpha(p\beta + q)^{n-1}$ であるから

$$\begin{aligned} \alpha c_n - d_n &= \alpha(p\alpha + q)^{n-1} - \alpha(p\beta + q)^{n-1} \\ c_n + \alpha d_n &= (p\alpha + q)^{n-1} + \alpha^2(p\beta + q)^{n-1} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} (\alpha^2 + 1)a_n &= \alpha(p\alpha + q)^{n-1} - \alpha(p\beta + q)^{n-1} \\ (\alpha^2 + 1)b_n &= (p\alpha + q)^{n-1} + \alpha^2(p\beta + q)^{n-1} \end{aligned}$$

となる。 $A = \frac{p\alpha + q}{p\beta + q}$ とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\alpha(p\alpha + q)^{n-1} - \alpha(p\beta + q)^{n-1}}{(p\alpha + q)^{n-1} + \alpha^2(p\beta + q)^{n-1}} \\ &= \frac{\alpha(A^{n-1} - 1)}{A^{n-1} + \alpha^2} \\ &= \frac{\alpha(A^{n-1} - 1)}{A^{n-1} + \alpha + 1} \\ &= \alpha\left(1 - \frac{\alpha + 2}{A^{n-1} + \alpha + 1}\right) \end{aligned}$$

となる。いま、 $\alpha > \beta$ であるから、 $p\beta + q > 0$ のとき

$$p\alpha + q > p\beta + q > 0$$

であり

$$A = \frac{p\alpha + q}{p\beta + q} > 1$$

となる。したがって A^{n-1} は n に関して単調増加であるから、 $\alpha > 0$ に注意すれば、 $\alpha\left(1 - \frac{\alpha + 2}{A^{n-1} + \alpha + 1}\right)$ は n に関して単調増加となり、したがって $\frac{a_n}{b_n}$ も n に関して単調増加である。以上より、 $p\beta + q > 0$ のとき、 $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} > \frac{a_n}{b_n}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) である。

(証明終)

3

(1)

与えられた関係式は、 $x > 0$ のとき

$$12xf'(x) + 12\int_0^x f(t)dt = 15x^4 - 16x^3 \Leftrightarrow 12xf'(x) = -12\int_0^x f(t)dt - 15x^4 - 16x^3$$

となる。ここで、関数 $f(x)$ は区間 $-1 \leq x \leq 1$ の範囲で連続であるから、 $\int_0^x f(t)dt$ は x で微分可能であるため、 $xf'(x)$ も微分可能であり、両辺を x で微分して変形すると

$$12f(x) + 12xf'(x) = -12f(x) + 60x^3 - 48x^2 \Leftrightarrow 2f(x) + xf'(x) = 5x^3 - 4x^2$$

となる。ここで、両辺に x をかけて、微積分の基本定理を用いることで

$$2xf'(x) + x^2f''(x) = 5x^4 - 4x^3 \Leftrightarrow \{x^2f'(x)\}' = 5x^4 - 4x^3$$

$$\therefore x^2f'(x) = x^5 - x^4 \quad (\because 0^2f'(0) = 0)$$

となるから、 $x > 0$ のとき、 $f(x) = x^3 - x^2$ であることがわかる。

また、同様にして $x < 0$ のとき、 $f(x) = -x^3 - x^2$ であることがわかる。

したがって、 $f(0) = 0$ と合わせて、 $f(x) = |x^3| - x^2$ と求まる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = |x^3| - x^2$$

(2)

$f(x)$ が $x = 0$ で微分可能であることを示すためには、極限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$ が存在することを示せばよい。ここで、各極限について

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{(\Delta x)^3 - (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \{(\Delta x)^2 - \Delta x\} = 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{-(\Delta x)^3 - (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \{-(\Delta x)^2 - \Delta x\} = 0$$

となるから、 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = 0$ であることがわかる。したがって、 $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であり、 $f'(0) = 0$ であることが示された。

(証明終)

(3)

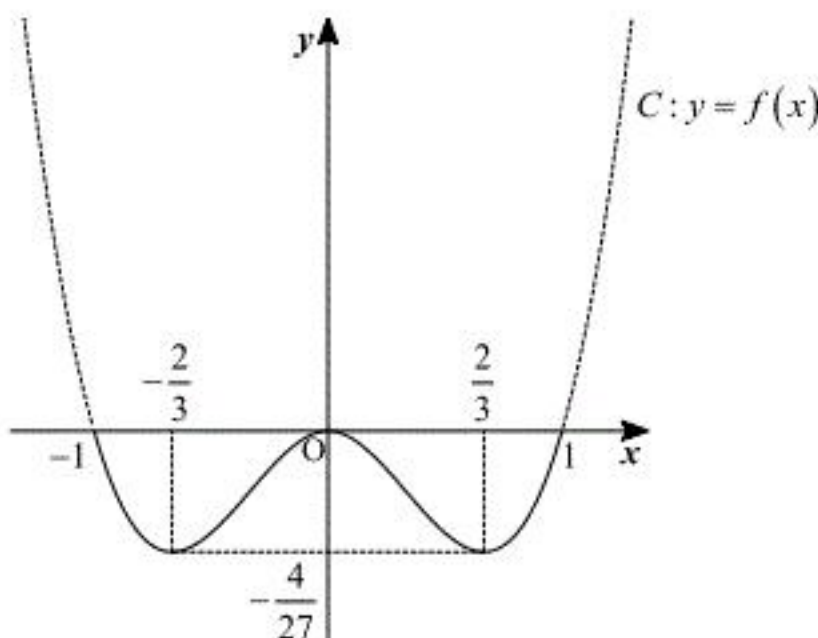
関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -3x^2 - 2x & (x < 0) \end{cases} = \begin{cases} 3x\left(x - \frac{2}{3}\right) & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -3x\left(x + \frac{2}{3}\right) & (x < 0) \end{cases}$$

であるから、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	-1	...	$-\frac{2}{3}$	...	0	...	$\frac{2}{3}$	...	1
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{4}{27}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{4}{27}$	$\nearrow$	0

よって、曲線 $C: y = f(x)$ のグラフは以下の図のようになる。



したがって、曲線 C と直線 $\ell: y = a$ との区間 $-1 \leq x \leq 1$ における共有点の個数は

$$a > 0, a < -\frac{4}{27} \text{ のとき } 0 \text{ 個, } a = 0 \text{ のとき } 3 \text{ 個,}$$

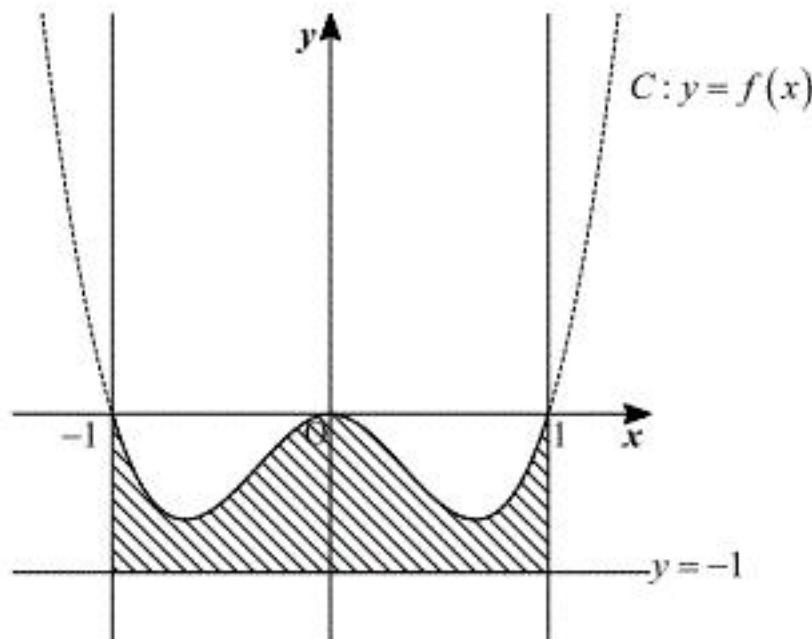
$$-\frac{4}{24} < a < 0 \text{ のとき } 4 \text{ 個, } a = -\frac{4}{27} \text{ のとき } 2 \text{ 個}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a > 0, a < -\frac{4}{27} \text{ のとき } 0 \text{ 個, } a = 0 \text{ のとき } 3 \text{ 個, } -\frac{4}{24} < a < 0 \text{ のとき } 4 \text{ 個, } a = -\frac{4}{27} \text{ のとき } 2 \text{ 個}$$

(4)

曲線 C と 3 直線 $y = -1, x = -1, x = 1$ で囲まれる部分は、以下の図の斜線部である。



これを x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積は

$$\begin{aligned} \pi \cdot 1^2 \cdot 2 - 2 \cdot \pi \int_0^1 (x^3 - x^2)^2 dx &= 2\pi - 2\pi \int_0^1 (x^6 - 2x^5 + x^4) dx \\ &= 2\pi - 2\pi \left[\frac{x^7}{7} - \frac{x^6}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_0^1 \\ &= 2\pi - \frac{2}{105} \pi \\ &= \frac{208}{105} \pi \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{208}{105} \pi$$

(1)

2 次正方行列 A の逆行列が存在しないことから,

$$\det A = 0$$

である。よって、ケーリーハミルトンの式より,

$$A^2 - (a+d)A = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。さらに、 $A^2 \neq O$ であることから、少なくとも $A \neq O$ は成り立ち,

$$a+d \neq 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。ここで,

$$XAX = X \quad \dots \textcircled{3}$$

$$AX = XA \quad \dots \textcircled{4}$$

$$A^3X = A^2 \quad \dots \textcircled{5}$$

とおく。⑤より

$$A^3X = A^2$$

$$\Leftrightarrow (a+d)A^2X = (a+d)A \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\Leftrightarrow (a+d)^2 AX = (a+d)A \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\Leftrightarrow (a+d)AX = A \quad (\because \textcircled{2}) \quad \dots \textcircled{6}$$

となる。⑥の両辺に左から X をかけると

$$(a+d)XAX = XA$$

$$\Leftrightarrow XAX = \frac{1}{a+d}XA \quad (\because \textcircled{2})$$

となり、④より

$$XAX = \frac{1}{a+d}AX$$

である。さらに③より

$$\frac{1}{a+d}AX = X$$

$$\Leftrightarrow AX = (a+d)X$$

となり、これを⑥に代入すると

$$(a+d)^2 X = A$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{1}{(a+d)^2}A \quad \dots \textcircled{7}$$

となる。したがって③、④、⑤を同時に満たす行列 X は $\frac{1}{(a+d)^2}A$ のただ 1 つしか存在しない。

よって、2 次正方行列 X が $XAX = X$ かつ $AX = XA$ かつ $A^3X = A^2$ を満たし、さらに 2 次正方行列 Y が $YAY = Y$ かつ $AY = YA$ かつ $A^3Y = A^2$ を満たすとき、 $Y = X$ となることがしめされた。

(証明終)

(2)

⑦より、 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{(1+1)^2}A \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad X = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$