

平成 26 年度 前期日程
入学者選抜学力検査問題

環 境 ・ 情 報 科 学 科
数 学

〔注 意〕

- 1 机上に受験票を提示しておくこと。
- 2 監督者の指示があるまで、この問題冊子を開いてはいけない。
- 3 解答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。
- 4 解答用紙に受験番号および氏名を必ず記入すること。
- 5 この冊子の問題は 4 ページからなっている。
- 6 解答用紙は 4 枚ある。
- 7 下書き用紙は 4 枚ある。
- 8 この問題冊子のうち、落丁・乱丁および印刷不鮮明な箇所があれば、手をあげて申し出ること。
- 9 この問題の内容に関する質問には答えない。
- 10 試験開始後 60 分経過しないと退室できない。退室するときには、解答用紙を机上に置き、問題冊子、下書き用紙は持ち帰ること。

1 O を原点とする xyz 空間内に 5 点 $A(10, 0, 0)$, $B(10, 5\sqrt{3}, 15)$, $C(8, -\sqrt{3}, -3)$, $D(8, 5\sqrt{3}, 15)$, $E(-4, \sqrt{3}, 3)$ をとる. 2 点 O , A を通る直線を l_1 , 2 点 O , B を通る直線を l_2 , 2 点 C , D を通る直線を l_3 , 2 点 C , E を通る直線を l_4 とする. 2 つの直線 l_1 , l_3 の交点を F , 2 つの直線 l_2 , l_3 の交点を G , 2 つの直線 l_2 , l_4 の交点を H , 2 つの直線 l_1 , l_4 の交点を I とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 6 点 O , A , B , C , D , E は同一平面上にあることを示せ.
- (2) 4 点 F , G , H , I の座標を求めよ.
- (3) 四角形 $FGHI$ の面積を求めよ.
- (4) 四角形 $FGHI$ に外接する円の中心座標と半径を求めよ.

(配点 100 点)

2 p, q は自然数とする. α, β は $\alpha > \beta$ を満たす 2 次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解とする. 2 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を

$$a_1 = 0, \quad b_1 = 1$$

$$a_{n+1} = (p+q)a_n + pb_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_{n+1} = pa_n + qb_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める. 以下の問いに答えよ.

(1) $a_n > 0$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) かつ $b_n > 0$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) となることを示せ.

(2) $c_n = \alpha a_n + b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), $d_n = -a_n + \alpha b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく. $c_n = (p\alpha + q)^{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) かつ $d_n = \alpha(p\beta + q)^{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを示せ.

(3) $p\beta + q > 0$ のとき, $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} > \frac{a_n}{b_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) となることを示せ.

(配点 100 点)

3 区間 $-1 \leq x \leq 1$ で定義された連続関数 $f(x)$ を

$$12xf(x) + 12 \int_0^x f(t) dt = 15x^3|x| - 16x^3, \quad f(0) = 0$$

によって定める. 曲線 $C: y = f(x)$ を考える. 以下の問いに答えよ.

- (1) $f(x)$ を求めよ.
- (2) $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示せ.
- (3) 曲線 C と直線 $\ell: y = a$ との区間 $-1 \leq x \leq 1$ における共有点の個数を, a の値によって分類せよ.
- (4) 曲線 C と 3 直線 $y = -1, x = -1, x = 1$ で囲まれる部分を, x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

(配点 100 点)

- 4 実数を成分とする 2 次正方行列 A の逆行列は存在しないとする. 2 次正方行列 X は $XAX = X$ かつ $AX = XA$ かつ $A^3X = A^2$ を満たすとする. $A^2 \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 2 次正方行列 Y が $YAY = Y$ かつ $AY = YA$ かつ $A^3Y = A^2$ を満たすとき, $Y = X$ であることを示せ.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, X を求めよ.

(配点 100 点)