1

(1)

以下，x の値により場合分けを行う。

[1] $2 \leqq x \leqq 5$ のとき

このとき，与えられた不等式の両辺はともに負でないことから，この不等式を満たす x の範囲は，

$$\sqrt{5-x} > x-2$$
$$\Leftrightarrow 5-x > (x-2)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-3x-1<0$$
$$\therefore 2 \leqq x < \frac{3+\sqrt{13}}{2} \quad (\because 2 \leqq x \leqq 5)$$

である。

[2] $x<2$ のとき

このとき，与えられた不等式の左辺は常に正であり，右辺は常に負である。従って，この不等式は $x<2$ のときには常に成り立つ。

以上[1], [2]より，与えられた不等式を満たす x の値の範囲は，

$$x < \frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

である。

(答) $x < \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

(2)

与えられた方程式は，

$$\log_2 x + \log_8 x = (\log_2 x)(\log_8 x)$$
$$\Leftrightarrow \log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 8} = (\log_2 x)\left(\frac{\log_2 x}{\log_2 8}\right)$$
$$\Leftrightarrow \log_2 x + \frac{1}{3}\log_2 x = \frac{1}{3}(\log_2 x)^2$$
$$\Leftrightarrow (\log_2 x)(\log_2 x - 4) = 0$$
$$\Leftrightarrow \log_2 x = 0, 4$$
$$\therefore x = 1, 16$$

と解くことができる。これらは真数条件 $x>0$ を満たす。

(答) $x=1, 16$

(3)

与えられた不等式は，三角関数の2倍角の公式および3倍角の公式を用いて

$$2(\cos 4x-1)\cos x - 3(\cos 3x+\cos x) > 0$$
$$\Leftrightarrow 2\left\{(2\cos^2 2x-1)-1\right\}\cos x - 3\left\{(4\cos^3 x-3\cos x)+\cos x\right\} > 0$$
$$\Leftrightarrow 2\left\{2(2\cos^2 x-1)^2-2\right\}\cos x - 6(2\cos^2 x-1)\cos x > 0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos x\left\{2(2\cos^2 x-1)^2-3(2\cos^2 x-1)-2\right\} > 0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos x\left\{2(2\cos^2 x-1)+1\right\}\left\{(2\cos^2 x-1)-2\right\} > 0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos x(4\cos^2 x-1)(2\cos^2 x-3) > 0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos x(2\cos x+1)(2\cos x-1)(2\cos^2 x-3) > 0$$

と変形することができる。$0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$ のとき，$\cos x > 0,\ 2\cos^2 x - 3 < 0$ であるから，与えられた不等式が成り立つ x の範囲は

$$4\cos^2 x - 1 < 0$$
$$\Leftrightarrow \cos^2 x < \frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow 0 < \cos x < \frac{1}{2} \ (\because \cos x > 0)$$
$$\therefore \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$$

である。

(答) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$

2

(1)

題意より，

$$a_{n+2}{}^2-2a_{n+2}a_{n+1}+(1-r)a_{n+1}{}^2+2ra_{n+1}a_n-ra_n{}^2=0$$
$$\Leftrightarrow (a_{n+2}-a_{n+1})^2-r(a_{n+1}-a_n)^2=0$$
$$\Leftrightarrow b_{n+1}{}^2-rb_n{}^2=0$$

が成り立つ。 $r>0,\ b_n>0,\ b_{n+1}>0$ より，

$$b_{n+1}{}^2-rb_n{}^2=0$$
$$\therefore \frac{b_{n+1}}{b_n}=\sqrt{r}$$

を得る。

(答) $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\sqrt{r}$

(2)

(1)より，数列 $\{b_n\}$ は公比 $\sqrt{r}$ の等比数列であることが分かる。ここで，

$$b_1=a_2-a_1=1$$

であるから，

$$b_n=b_1\left(\sqrt{r}\right)^{n-1}=\left(\sqrt{r}\right)^{n-1}$$

となる。数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列であるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$n\geqq 2$ のとき，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sqrt{r}\right)^{k-1}$$

である。従って，$r\neq 1$ のとき，

$$a_n=\frac{\left(\sqrt{r}\right)^{n-1}-1}{\sqrt{r}-1}$$

であり，$r=1$ のとき，

$$a_n=n-1$$

である。これらは，$n=1$ のときも成り立つ。

(答) $r\neq 1$ のとき $a_n=\dfrac{\left(\sqrt{r}\right)^{n-1}-1}{\sqrt{r}-1}$，$r=1$ のとき $a_n=n-1$

(3)

(1), (2)の結果と点 P_n の定義より，

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}=(1,\ a_{n+1}-a_n)=\left(1,\ \left(\sqrt{r}\right)^{n-1}\right)$$

と成分表示することができる。

(答) $\left(1,\ \left(\sqrt{r}\right)^{n-1}\right)$

(4)

(3)の結果より，

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}}=\left(1,\ \left(\sqrt{r}\right)^{n-1}\right)\cdot\left(1,\ \left(\sqrt{r}\right)^{n}\right)=1+\left(\sqrt{r}\right)^{2n-1}\neq 0$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}}$ のなす角は $\dfrac{\pi}{2}$ とはならない。

(証明終)

3

(1)

題意より，

$$f(-1)=\frac{4}{3}(-1)^3+2(-1)^2+2(-1)+1$$
$$=-\frac{1}{3}$$
$$<0$$

$$f(0)=\frac{4}{3}\cdot 0^3+2\cdot 0^2+2\cdot 0+1$$
$$=1$$
$$>0$$

であるから，曲線 $y=f(x)$ は $-1<x<0$ の範囲で x 軸と交点をもつ。また，

$$f'(x)=4x^2+4x+2=4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1>0$$

であるから，$f(x)$ は単調増加関数である。従って，方程式 $f(x)=0$ の実数解 α はただ1つ存在し，それは，

$$-1<\alpha<0$$

を満たす。

(証明終)

(2)

$f(x), g(x)$ の定義より，

$$g'(x)=\frac{8}{3}x^3+4x^2+4x+2=2f(x)$$

が成り立つ。また，α の定義と，$f(x)$ が単調増加関数であることより，

$x=\alpha$ のとき $g'(x)=2f(x)=0$

$x<\alpha$ のとき $g'(x)=2f(x)<0$

$x>\alpha$ のとき $g'(x)=2f(x)>0$

であることが分かるから，$g(x)$ の増減表は下表のようになる。

x	$\cdots$	α	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	極小	↗

増減表より，$g(x)$ は $x=\alpha$ で最小値を取ることが分かる。α は $f(\alpha)=0$ を満たすため，

$\frac{4}{3}\alpha^3+2\alpha^2+2\alpha+1=0$ となることに注意すると，$g(x)$ の最小値は

$$g(\alpha)=\frac{2}{3}\alpha^4+\frac{4}{3}\alpha^2+2\alpha^2+2\alpha+1$$
$$=\frac{2}{3}\alpha^4$$
$$=\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\alpha^3+2\alpha^2+2\alpha+1\right)+\frac{1}{2}\alpha^2+\alpha+\frac{3}{4}$$
$$=\frac{1}{2}\alpha^2+\alpha+\frac{3}{4}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2}\alpha^2+\alpha+\frac{3}{4}$

4

(1)

曲線 $y=f(x)$ が x 軸と接するということは，方程式 $f(x)=0$ が1つの2重解をもつということである。ここで，

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-10x+k\right)=0$$

であるから，この方程式の1つの解は $x=0$ である。以下，2重解の値により場合分けを行う。

[1] 2重解が $x=0$ のとき

このとき，方程式，

$$x^2-10x+k=0$$

が $x=0$ を解にもてばよいので，

$$0^2-10\cdot 0+k=0$$
$$\therefore k=0$$

となるが，これは $k>0$ に不適である。

[2] 2重解が $x=0$ でないとき

このとき，方程式，

$$x^2-10x+k=0$$

が重解をもてばよいので，この判別式を D とすることで，

$$\frac{D}{4}=0$$
$$\Leftrightarrow (-5)^2-k=0$$
$$\therefore k=25$$

を得る。このとき，2重解の値は，

$$x^2-10x+25=0 \Leftrightarrow (x-5)^2=0$$

より $x=5$ であり0でない。従って $k=25$ は条件を満たす。

以上[1], [2]より，求める k の値は，

$$k=25$$

である。

(答) $k=25$

(2)

$0<x<5$ の範囲では，$f(x)>0$ が成り立つので，$y=f(x)$ と x によって囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_0^5 f(x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{10}{3}x^3+\frac{25}{2}x^2\right]_0^5$$
$$=\frac{625}{12}$$

と求めることができる。

(答) $S=\dfrac{625}{12}$