1

(1)

自然数a, bが$a^2=2b$を満たすときaは偶数であることを，背理法を用いて証明する。aが奇数であると仮定すると，aは自然数mを用いて$a=2m-1$と表せる。ここで，a^2は，

$$\begin{aligned} a^2 &= (2m-1)^2 \\ &= 2(2m^2-2m)+1 \end{aligned}$$

となるから$a^2=2b$の左辺は奇数であるが，これは右辺の$2b$が偶数であることと矛盾する。したがって，背理法によりaは偶数であることが証明された。

(証明終)

(2)

自然数c, d, eが$c^2+d^2=3e$を満たすとき，c, d, eがいずれも3の倍数であることを背理法を用いて証明する。c, d, eのいずれかが3の倍数で無いと仮定する。ここでc, dが対称であることを考慮して場合分けをする。以下，m, n, lは0以上の整数とする。

[1]　$c=3m, d=3n, e=3l\pm1$のとき

左辺は，

$$c^2+d^2=9(m^2+n^2)$$

となるから9の倍数である。一方，右辺は

$$\begin{aligned} 3e &= 3(3l\pm1) \\ &= 9l\pm3 \end{aligned}$$

となり，9の倍数にはならないから矛盾する。

[2]　$c=3m, d=3n\pm1$のとき

左辺は，

$$\begin{aligned} c^2+d^2 &= 9m^2+9n^2\pm6n+1 \\ &= 3(3m^2+3n^2\pm2n)+1 \end{aligned}$$

となり3の倍数にはならない。一方，右辺は$3e$であり3の倍数であるから矛盾する。

[3]　$c=3m\pm1, d=3n\pm1$のとき

左辺は，

$$\begin{aligned} c^2+d^2 &= 9m^2\pm6m+1+9n^2\pm6n+1 \\ &= 3(3m^2\pm2m+3n^2\pm2n)+2 \end{aligned}$$

となり3の倍数にはならない。一方，右辺は$3e$であり3の倍数であるから矛盾する。

以上[1], [2], [3]より，背理法によりc, d, eはいずれも3の倍数であることが証明された。

(証明終)

(3)

数学的帰納法を利用して，すべての自然数nに対して$n^{19}-n$を19で割った余りは0であることを示す。

[1]　$n=1$のとき

$$\begin{aligned} n^{19}-n &= 1^{19}-1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるから，成立する。

[2]　$n=k$ (kは自然数)のとき

$k^{19}-k$が19の倍数であることを仮定する。ここで，$n=k+1$について計算すると，

$$\begin{aligned} (k+1)^{19}-(k+1) &= k^{19}+\sum_{i=1}^{18} {}_{19}\mathrm{C}_i k^i+1-k-1 \\ &= (k^{19}-k)+\sum_{i=1}^{18} {}_{19}\mathrm{C}_i k^i \end{aligned}$$

が得られる。ここで${}_{19}\mathrm{C}_i\ (i=1, 2, \ldots, 18)$について，その計算式は

$${}_{19}\mathrm{C}_i=\frac{19!}{i!(19-i)!}$$

であるが，19は素数であり，分母は19未満の自然数しか因数に持たないから，${}_{19}\mathrm{C}_i$はすべて19の倍数である。したがって，$n=k+1$のときも成立する。

以上[1], [2]より，数学的帰納法により，すべての自然数nに対して$n^{19}-n$を19で割った余りは0であることが証明された。

(証明終)

2

(1)

題意より，$n=1, 2, 3, \ldots, m+1$ のとき，

$$P_{m+1}(n)=P_m(n)=a_n$$

が成り立つので，

$$P_{m+1}(n)-P_m(n)=a_n-a_n=0$$

である。

(答) $P_{m+1}(n)-P_m(n)=0$

(2)

$P_m(x)$ が m 次以下の多項式であることから x の方程式 $P_{m+1}(x)-P_m(x)=0$ は $(m+1)$ 次以下の多項式となる。(1)よりこの方程式は $x=1, 2, 3, \ldots, m+1$ を解にもつことが分かるので，0 でない実数 a を用いて，

$$P_{m+1}(x)-P_m(x)=a(x-1)(x-2)\cdots(x-m-1)$$

と表すことができる。この式において $x=0$ とすることで，

$$P_{m+1}(0)-P_m(0)=a(-1)(-2)\cdots(-m-1)=a(-1)^{m+1}(m+1)! \qquad \cdots①$$

となり，また，$x=m+2$ とすることで，

$$P_{m+1}(m+2)-P_m(m+2)=a(m+1)m(m-1)\cdots1=a(m+1)! \qquad \cdots②$$

となる。①，②から $a(m+1)!$ を消去することで，

$$\begin{aligned}P_{m+1}(0)-P_m(0)&=(-1)^{m+1}\{P_{m+1}(m+2)-P_m(m+2)\}\\&=(-1)^{m+1}\{a_{m+2}-P_m(m+2)\}\ (\because P_{m+1}(m+2)=a_{m+2})\end{aligned}$$

が成り立つことが示された。

(証明終)

(3)

$P_3(x)$ は 3 次以下の多項式であるから，

$$P_3(x)=px^3+qx^2+rx+s$$

とおくことができる。与えられた条件より，

$$\begin{cases}a_1=P_3(1)=p+q+r+s=1\\a_2=P_3(2)=8p+4q+2r+s=2\\a_3=P_3(3)=27p+9q+3r+s=3\\a_4=P_3(4)=64p+16q+4r+s=5\end{cases}$$

$$\therefore p=\frac{1}{6},\ q=-1,\ r=\frac{17}{6},\ s=-1$$

を得るから，

$$P_3(x)=\frac{1}{6}x^3-x^2+\frac{17}{6}x-1$$

であることが分かる。従って，

$$P_3(6)=\frac{1}{6}\cdot6^3-6^2+\frac{17}{6}\cdot6-1=16$$

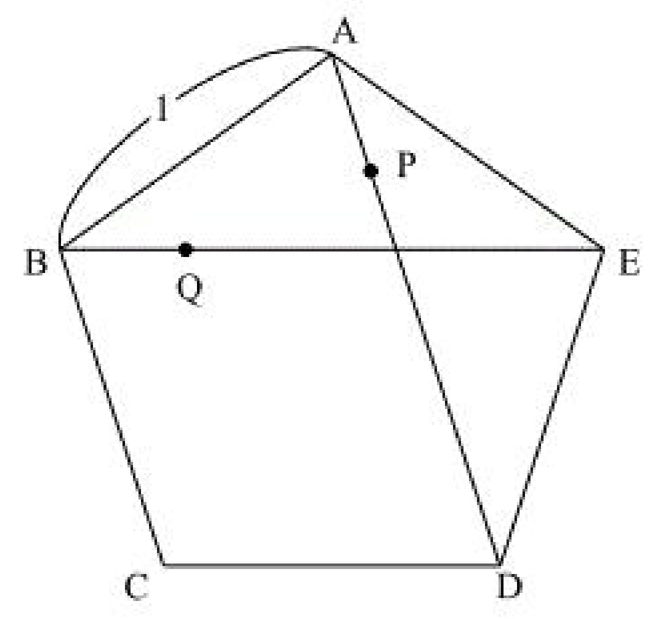
と求めることができる。

(答) $P_3(6)=16$

$\boxed{3}$

(1)

正五角形を図示すると以下のようになる。



正五角形の内角であるから，$\angle\mathrm{BAE}=\frac{3}{5}\pi$ である。したがって，内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ を計算すると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}&=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right|\cdot\cos\frac{3}{5}\pi\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}\right)\\&=-\sin\frac{\pi}{10}\\&=\frac{1-\sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(2)

$\triangle\mathrm{CBD}$ において余弦定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2&=\mathrm{CB}^2+\mathrm{CD}^2-2\mathrm{CB}\cdot\mathrm{CD}\cos\frac{3}{5}\pi\\&=2-2\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{4}\\&=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\\\therefore\mathrm{BD}&=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\\&=\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{2}\\&=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

が得られる。ここから $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を求める。まず $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ が平行であることを用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AD}}&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{\mathrm{AE}}\end{aligned}$$

と表せる。したがって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=t\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}t\overrightarrow{\mathrm{AE}}\end{aligned}$$

となる。次に，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を求める。点 Q は線分 BE を $t:(1-t)$ に内分する点であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}t\overrightarrow{\mathrm{AE}},\ \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

(3)

$\angle\mathrm{APQ}=\frac{\pi}{2}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$ が成立する。したがって，

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0\\\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right)=0\\\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2=0\end{aligned}$$

が得られる。これを分割して計算する。まず，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ について

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}&=\left(t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}t\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)\cdot\left\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right\}\\&=t(1-t)+\frac{1+\sqrt{5}}{2}t^2+\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t(1-t)+t^2\right\}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}\\&=t(1-t)+\frac{1+\sqrt{5}}{2}t^2+\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t+\frac{1-\sqrt{5}}{2}t^2\right\}\frac{1-\sqrt{5}}{4}\\&=\frac{1+\sqrt{5}}{4}t^2+\frac{1}{2}t\end{aligned}$$

となる。次に，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2$ は

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2&=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}t\right)^2\\&=\frac{3+\sqrt{5}}{2}t^2\end{aligned}$$

が得られる。したがって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2=0$ に代入すると

$$\begin{aligned}&\frac{1+\sqrt{5}}{4}t^2+\frac{1}{2}t-\frac{3+\sqrt{5}}{2}t^2=0\\\Leftrightarrow\ &-\left(5+\sqrt{5}\right)t^2+2t=0\\\Leftrightarrow\ &t\left\{2-\left(5+\sqrt{5}\right)t\right\}=0\\\therefore\ &t=\frac{5-\sqrt{5}}{10}\ (\because 0<t<1)\end{aligned}$$

が得られる。

(答) $\frac{5-\sqrt{5}}{10}$

4

(1)

曲線 C_1 の式を微分すると，

$$y'=\frac{1}{x}$$

となり，曲線 C_2 の式を微分すると，

$$y'=2ax$$

となる。曲線 C_1, C_2 が $x=x(b)$ で接することから傾きが等しいので

$$\frac{1}{x(b)}=2a\cdot x(b)$$

$$\Leftrightarrow a\{x(b)\}^2=\frac{1}{2} \qquad \cdots ①$$

が得られる。また，$x=x(b)$ で y 座標が一致することから，

$$\log x(b)=a\{x(b)\}^2-b$$

が得られる。これに①を代入すると，

$$\log x(b)=\frac{1}{2}-b$$

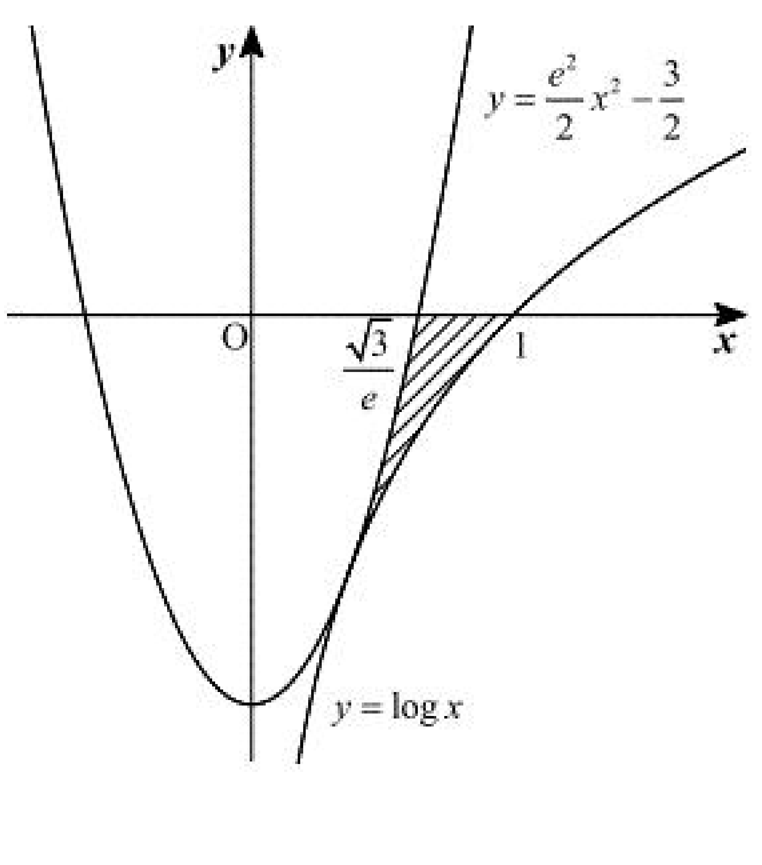
$$\Leftrightarrow x(b)=e^{\frac{1}{2}-b}$$

が求まる。

(答) $x(b)=e^{\frac{1}{2}-b}$

(2)

$b=\frac{3}{2}$ のとき接点Pの x 座標は e^{-1} となる。また①より，a の値は $\frac{1}{2}e^2$ となる。



したがって，斜線部の面積は

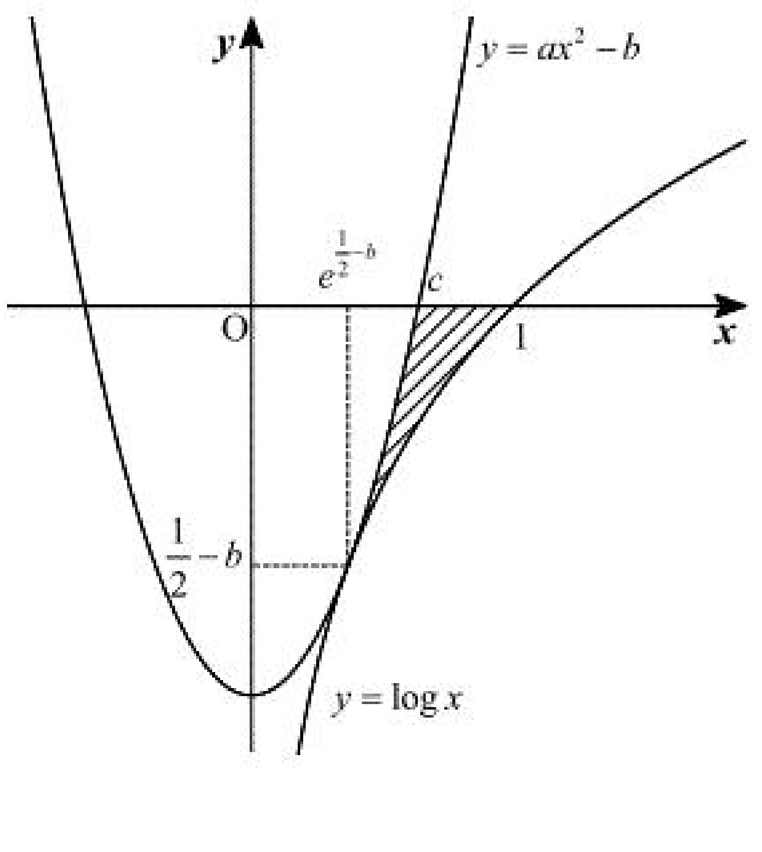
$$S\left(\frac{3}{2}\right)=\int_{e^{-1}}^{\sqrt{3}e^{-1}}\left\{\left(\frac{e^2}{2}x^2-\frac{3}{2}\right)-\log x\right\}dx+\int_{\sqrt{3}e^{-1}}^{1}(-\log x)dx$$
$$=\int_{e^{-1}}^{\sqrt{3}e^{-1}}\left(\frac{e^2}{2}x^2-\frac{3}{2}\right)dx-\int_{e^{-1}}^{1}\log x dx$$
$$=\left[\frac{e^2}{6}x^3-\frac{3}{2}x\right]_{e^{-1}}^{\sqrt{3}e^{-1}}-\left[x\log x-x\right]_{e^{-1}}^{1}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-1}-\frac{3\sqrt{3}}{2}e^{-1}-\frac{1}{6}e^{-1}+\frac{3}{2}e^{-1}+1-2e^{-1}$$
$$=1-\frac{2+3\sqrt{3}}{3}e^{-1}$$

となる。

(答) $S\left(\frac{3}{2}\right)=1-\frac{2+3\sqrt{3}}{3}e^{-1}$

(3)

$S(b)$ を図示すると以下のようになる。ただし，$y=ax^2-b\ (x>0)$ x 軸の交点の x 座標を c とする。



(1)の結果より，

$$a=\frac{1}{2}e^{2b-1}$$

となる。また，x 軸との交点の x 座標 c は，

$$c=\sqrt{\frac{2b}{e^{2b-1}}}$$

である。ここで，$x(b), c$ の $b\to\infty$ の極限を求めるために，$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$ の値を求める。

$f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2\ (x\geqq 0)$ とすると

$$f'(x)=e^x-x$$
$$f''(x)=e^x-1$$

より，$x\geqq 0$ において $f''(x)\geqq 0$ が成立する。これと $f'(0)=0$ より $x\geqq 0$ において $f'(x)\geqq 0$ が成立する。また，これと $f(0)=1>0$ より，$x\geqq 0$ において $f(x)>0$，つまり $e^x>\frac{1}{2}x^2$ が成立する。よって $x\geqq 0$ において

$$0\leqq\frac{x}{e^x}<\frac{2}{x}\left(\because e^x>\frac{1}{2}x^2\geqq 0\right)$$

であり，$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$ であるから，はさみうちの定理より $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ と求まる。これを用いると

$$\lim_{b\to\infty}x(b)=\lim_{b\to\infty}e^{\frac{1}{2}-b}$$
$$=0$$
$$\lim_{b\to\infty}c=\lim_{b\to\infty}\sqrt{\frac{2b}{e^{2b-1}}}$$
$$=0$$

となる。また，$e^{\frac{1}{2}-b}>0$ と $\sqrt{\frac{2b}{e^{2b-1}}}>0$ が常に成り立つことから，$x(b), c$ は正の値側から0に近づく。ここで $S(b)$ を計算すると，

$$S(b)=\int_{x(b)}^{c}\left\{\left(\frac{e^2}{2}x^2-\frac{3}{2}\right)-\log x\right\}dx+\int_{c}^{1}(-\log x)dx$$
$$=\int_{x(b)}^{c}\left(\frac{e^2}{2}x^2-\frac{3}{2}\right)dx-\int_{x(b)}^{1}\log x dx$$
$$=\left[\frac{e^2}{6}x^3-\frac{3}{2}x\right]_{x(b)}^{c}-\left[x\log x-x\right]_{x(b)}^{1}$$
$$=\frac{e^2c^3}{6}-\frac{3}{2}c-\frac{e^2}{6}\{x(b)\}^3+\frac{3}{2}x(b)+1+x(b)\log x(b)-x(b)$$
$$=\frac{e^2c^3}{6}-\frac{3}{2}c+1-\frac{e^2}{6}\{x(b)\}^3+\frac{1}{2}x(b)+x(b)\log x(b)$$

が得られる。ここで，$x\log x$ の $x\to+0$ の極限を求める。$x=\frac{1}{e^t}$ とおき，$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ を用いると，

$$\lim_{x\to+0}x\log x=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{e^t}=0$$

が得られる。したがって，

$$\lim_{b\to\infty}S(b)=\lim_{b\to\infty}\left\{\frac{e^2c^3}{6}-\frac{3}{2}c+1-\frac{e^2}{6}\{x(b)\}^3+\frac{1}{2}x(b)+x(b)\log x(b)\right\}$$
$$=1$$

が示された。

(証明終)