

平成27年度 前期日程
入学者選抜学力検査問題

環境・情報科学科学
数 学

〔注 意〕

- 1 机上に受験票を提示しておくこと。
- 2 監督者の指示があるまで、この問題冊子を開いてはいけない。
- 3 解答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。
- 4 解答用紙に受験番号および氏名を必ず記入すること。
- 5 この冊子の問題は4ページからなっている。
- 6 解答用紙は4枚ある。
- 7 下書き用紙は4枚ある。
- 8 この問題冊子のうち、落丁・乱丁および印刷不鮮明な箇所があれば、手をあげて申し出ること。
- 9 この問題の内容に関する質問には答えない。
- 10 試験開始後60分経過しないと退室できない。退室するときには、解答用紙を机上に置き、問題冊子、下書き用紙は持ち帰ること。

1 以下の問いに答えよ.

(1) a, b は $a^2 = 2b$ を満たす自然数とする. このとき, a は偶数であることを, 背理法を用いて証明せよ.

(2) c, d, e は $c^2 + d^2 = 3e$ を満たす自然数とする. このとき, c, d, e はいずれも 3 の倍数であることを証明せよ.

(3) すべての自然数 n に対して $n^{19} - n$ を 19 で割った余りは 0 であることを証明せよ.

(配点 100 点)

2 l, m を 0 以上の整数とする. n を自然数とする. 実数の数列 $\{a_n\}$ に対して x の l 次多項式 $P_m(x)$ ($l \leq m$) が $P_m(n) = a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots, m+1$) を満たすとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $n = 1, 2, 3, \dots, m+1$ のとき, $P_{m+1}(n) - P_m(n)$ の値をすべて求めよ.

(2) $P_{m+1}(0) - P_m(0) = (-1)^{m+1}(a_{m+2} - P_m(m+2))$ となることを示せ.

(3) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 5$ のとき, $P_3(6)$ の値を求めよ.

(配点 100 点)

3 $0 < t < 1$ とする. 1 辺の長さが 1 である正五角形 ABCDE において, 線分 AD を $t : (1-t)$ に内分する点を P, 線分 BE を $t : (1-t)$ に内分する点を Q とするとき, 以下の問いに答えよ. ただし, $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD} \parallel \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BE} \parallel \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CE} \parallel \overrightarrow{BA}$, $\sin \frac{\pi}{10} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ を証明なしで用いてよい.

(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$ であることを示せ.

(2) \overrightarrow{AP} , \overrightarrow{AQ} を \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AE} , t を用いて表せ.

(3) $\angle APQ = \frac{\pi}{2}$ となる t の値を求めよ.

(配点 100 点)

4 $a > 0$, $b > \frac{1}{2}$ とする. xy 平面上に, 曲線 $C_1 : y = \log x$ ($x > 0$), 曲線 $C_2 : y = ax^2 - b$ ($x > 0$) がある. C_1 と C_2 は点 P で接している. P の x 座標を b の関数と考えて $x(b)$ とする. C_1 と C_2 と x 軸で囲まれた部分の面積を b の関数と考えて $S(b)$ とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $x(b)$ を b を用いて表せ.

(2) $S\left(\frac{3}{2}\right)$ の値を求めよ.

(3) $\lim_{b \rightarrow \infty} S(b) = 1$ となることを示せ.

(配点 100 点)

