

(1)

点Bと x 軸に関して対称な点を点 $B'(7, -2)$ とおく。点Pが直線 AB' 上に存在しないとき $\triangle AB'P$ の存在条件から、 $AP+B'P > AB'$ となる。点Pが直線 AB' 上にあるとき、 $AP+B'P = AB'$ となる。よって、点Pが直線 AB' 上にあるとき $AP+B'P$ は最小となる。また $B'P = BP$ であるから、 $AP+BP$ も最小となる。直線 AB' の方程式は、

$$y = \frac{-2-10}{7-(-1)}(x-7)-2 = -\frac{3}{2}x + \frac{17}{2}$$

であるから、求める点Pの x 座標はこの直線と x 軸との交点の x 座標を考え、

$$0 = -\frac{3}{2}x + \frac{17}{2}$$

$$\therefore x = \frac{17}{3}$$

と分かる。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{17}{3}$$

(2)

$n=17, 18$ のときは必ず当たりくじを含むので、 $n \leq 16$ の場合を考える。あたりくじ2本を含む18本のくじから n 本を同時に引くとき、当たりくじが1本も含まれない確率を p_n とおくと、

$$p_n = \frac{{}_{18-2}C_n}{{}_{18}C_n} = \frac{16!}{n!(16-n)!} \cdot \frac{n!(18-n)!}{18!} = \frac{(18-n)(17-n)}{18 \cdot 17}$$

と表すことができる。当たりくじを1本以上含む確率が $\frac{1}{2}$ より大きくなることと、 $p_n < \frac{1}{2}$ が

成り立つことは同値であるから、求める n は、

$$p_n < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(18-n)(17-n)}{18 \cdot 17} < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow (18-n)(17-n) < 153 \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たす最小の n である。ここで、 $\textcircled{1}$ の左辺は、 $n \leq 16$ で単調減少し、

$$(18-5)(17-5) = 13 \cdot 12 = 156 > 153$$

$$(18-6)(17-6) = 12 \cdot 11 = 132 < 153$$

が成り立つので、 $\textcircled{1}$ を満たす最小の自然数 n は、

$$n = 6$$

と分かる。

$$(\text{答}) \quad n = 6$$

(3)

このバクテリア10個は、 n 分後に、

$$10 \cdot (1.08)^n \text{ 個}$$

となっているから、初めて1000個以上になるのは、

$$10 \cdot (1.08)^n \geq 1000$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{108}{100}\right)^n \geq 100$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2^2 \cdot 3^3}{10^2}\right)^n \geq 10^2$$

$$\Leftrightarrow n(2\log_{10} 2 + 3\log_{10} 3 - 2\log_{10} 10) \geq 2\log_{10} 10 (\because 1 < 10)$$

$$\Leftrightarrow (2 \cdot 0.3010 + 3 \cdot 0.4771 - 2)n \geq 2$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{2}{0.0333} = 60.06 \dots$$

より、求める最小の n は $n=61$ であり、

$$61 \text{ 分後}$$

と分かる。

$$(\text{答}) \quad 61 \text{ 分後}$$

2

(1)

OB=6より、正四面体OABCは一辺の長さが6の正四面体である。従って、

$$\begin{cases} \text{OA}^2 = 6^2 \\ \text{AB}^2 = 6^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 = 6^2 \\ a_1^2 + (6-a_2)^2 = 6^2 \end{cases}$$

が成り立つ。これら2式の差を考えることで、

$$\begin{aligned} 2 \cdot 6a_2 - 6^2 &= 0 \\ \therefore a_2 &= 3 \end{aligned}$$

が得られ、これより、

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 &= 6^2 \\ \Leftrightarrow a_1^2 + 3^2 &= 6^2 \\ \therefore a_1 &= 3\sqrt{3} \quad (\because a_1 > 0) \end{aligned}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad a_1 = 3\sqrt{3}, a_2 = 3$$

(2)

正四面体の対称性より、 $\triangle OAB$ を含む平面、すなわち点Cからxy平面に下ろした垂線の足を点H($c_1, c_2, 0$)とすると、Hは $\triangle OAB$ の重心と一致する。従って、

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{0+a_1+0}{3} = \sqrt{3} \\ c_2 &= \frac{0+a_2+6}{3} = 3 \end{aligned}$$

と求めることができる。これより、

$$\begin{aligned} \text{OC}^2 &= 6^2 \\ \Leftrightarrow c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 6^2 \\ \therefore c_3 &= 2\sqrt{6} \quad (\because c_3 > 0) \end{aligned}$$

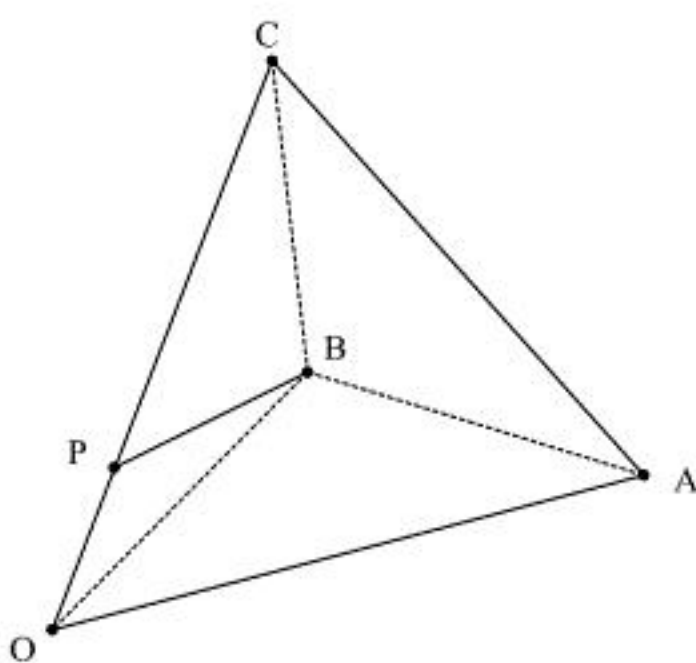
を得る。

$$(\text{答}) \quad c_1 = \sqrt{3}, c_2 = 3, c_3 = 2\sqrt{6}$$

(3)

t の値により場合分けを行い考える。

[1] $0 \leq t \leq 1$ のとき、



このとき、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{OP}} &= \frac{t}{2} \overrightarrow{\text{OC}} \\ \overrightarrow{\text{OQ}} &= \overrightarrow{\text{OB}} \end{aligned}$$

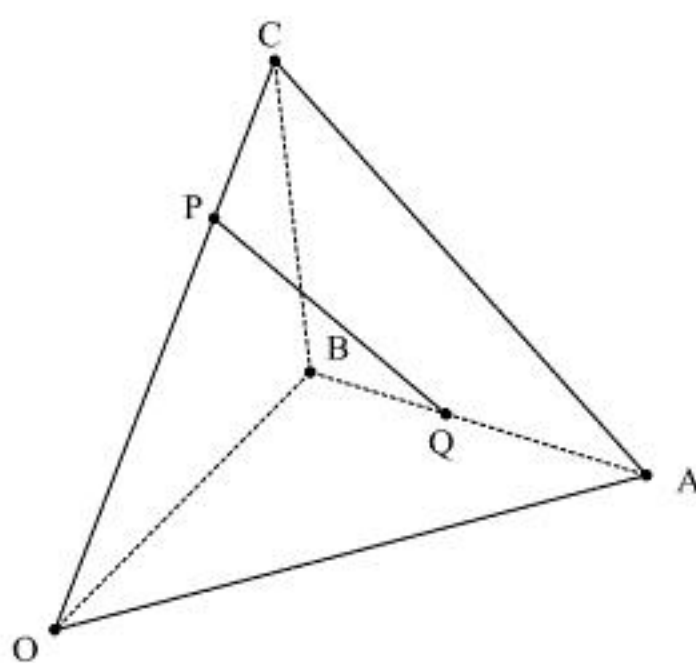
であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{PQ}} &= \overrightarrow{\text{OQ}} - \overrightarrow{\text{OP}} \\ &= \overrightarrow{\text{OB}} - \frac{t}{2} \overrightarrow{\text{OC}} \\ &= (0, 6, 0) - \frac{t}{2} (\sqrt{3}, 3, 2\sqrt{6}) \\ &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t, 6 - \frac{3}{2}t, -\sqrt{6}t \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\text{PQ}}|^2 &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t \right)^2 + \left(6 - \frac{3}{2}t \right)^2 + (-\sqrt{6}t)^2 \\ &= 9(t-1)^2 + 27 \end{aligned}$$

が成り立つ。従って、 $0 \leq t \leq 1$ の範囲で $|\overrightarrow{\text{PQ}}|^2$ は $t=1$ のときに最小値27をとる。

[2] $1 < t \leq 2$ のとき



このとき、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{OP}} &= \frac{t}{2} \overrightarrow{\text{OC}} \\ \overrightarrow{\text{OQ}} &= \overrightarrow{\text{OB}} + (t-1)\overrightarrow{\text{BA}} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{PQ}} &= \overrightarrow{\text{OQ}} - \overrightarrow{\text{OP}} \\ &= \left\{ \overrightarrow{\text{OB}} + (t-1)\overrightarrow{\text{BA}} \right\} - \frac{t}{2} \overrightarrow{\text{OC}} \\ &= (0, 6, 0) + (t-1)(3\sqrt{3}, -3, 0) - \frac{t}{2} (\sqrt{3}, 3, 2\sqrt{6}) \\ &= \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}t - 3\sqrt{3}, -\frac{9}{2}t + 9, -\sqrt{6}t \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\text{PQ}}|^2 &= \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}t - 3\sqrt{3} \right)^2 + \left(-\frac{9}{2}t + 9 \right)^2 + (-\sqrt{6}t)^2 \\ &= 45t^2 - 126t + 108 \\ &= 45 \left(t - \frac{7}{5} \right)^2 + \frac{99}{5} \end{aligned}$$

が成り立つ。従って、 $1 < t \leq 2$ の範囲で $|\overrightarrow{\text{PQ}}|^2$ は $t = \frac{7}{5}$ のときに最小値 $\frac{99}{5}$ をとる。

[1], [2]の結果と、

$$27 > \frac{99}{5}$$

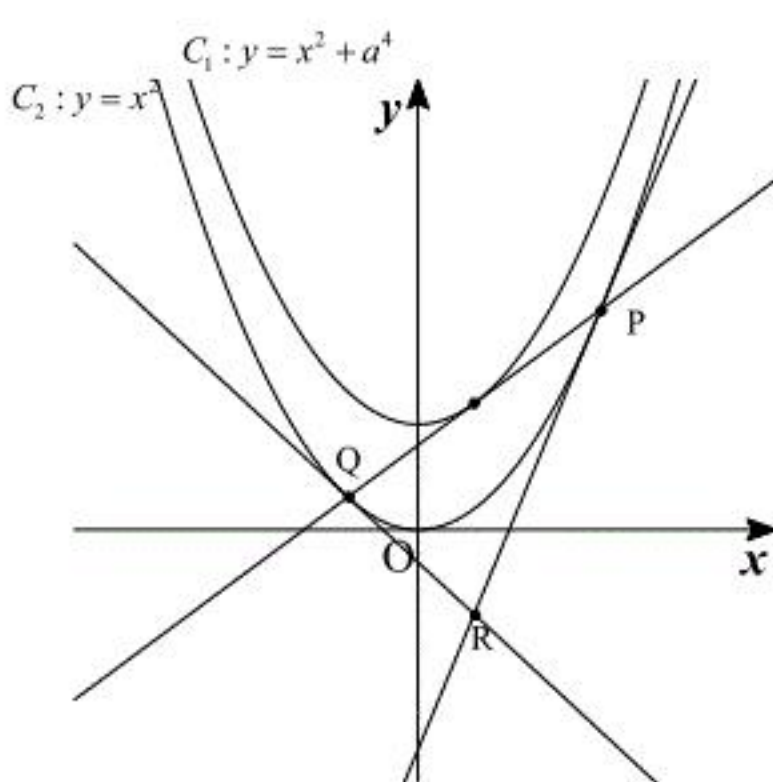
であることより、Pが出発してから t 秒後($0 \leq t \leq 2$)における $|\overrightarrow{\text{PQ}}|$ の最小値は、 $t = \frac{7}{5}$ のときに、

$$|\overrightarrow{\text{PQ}}| = \sqrt{\frac{99}{5}} = \frac{3\sqrt{55}}{5}$$

と分かる。

$$(\text{答}) \quad |\overrightarrow{\text{PQ}}| = \frac{3\sqrt{55}}{5} \left(t = \frac{7}{5} \right)$$

(1)



C_1 の方程式を x で微分すると、

$$y' = 2x$$

となるので、 C_1 上の点 $(t, t^2 + a^4)$ における接線の方程式は、

$$y = 2t(x - t) + t^2 + a^4 = 2tx - t^2 + a^4$$

と表される。この接線と C_2 との交点P, Qの x 座標は、

$$x^2 = 2tx - t^2 + a^4$$

$$\Leftrightarrow \{x - (t + a^2)\} \{x - (t - a^2)\} = 0$$

$$\therefore x = t \pm a^2$$

と求められる。ここで、 C_2 の方程式を x で微分すると、

$$y' = 2x$$

となるので、点 $(t \pm a^2, (t \pm a^2)^2)$ における接線の方程式は、

$$y = 2(t \pm a^2)\{x - (t \pm a^2)\} + (t \pm a^2)^2 = 2(t \pm a^2)x - (t \pm a^2)^2 \quad (\text{複号同順})$$

と表される。従って、点Pにおける C_2 の接線と点Qにおける C_2 の接線の交点Rの x 座標は、

$$2(t + a^2)x - (t + a^2)^2 = 2(t - a^2)x - (t - a^2)^2$$

$$\Leftrightarrow 4a^2x = 4a^2t$$

$$\therefore x = t$$

であり、 y 座標は、

$$y = 2(t \pm a^2)t - (t \pm a^2)^2 = t^2 - a^4$$

である。これらから t を消去することで、点Rの軌跡 C_4 の方程式は、

$$y = x^2 - a^4$$

と求めることができる。

(答) $C_4: y = x^2 - a^4$

(2)

C_3 と C_4 が2つの交点をもつということは、これらの方程式から y を消去することで得られる2次方程式、

$$-x^2 + 2a^2x - 2a^4 + 4a = x^2 - a^4$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2a^2x + a^4 - 4a = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が異なる2つの実数解をもつということである。従って、①の判別式を D とすると、求める a の範囲は、

$$\frac{D}{4} > 0$$

$$\Leftrightarrow (-a^2)^2 - 2(a^4 - 4a) > 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 < 8a$$

$$\Leftrightarrow a(a^3 - 8) < 0$$

$$\Leftrightarrow a(a - 2)(a^2 + 2a + 4) < 0$$

$$\Leftrightarrow a(a - 2) < 0 \quad (\because a^2 + 2a + 4 = (a + 1)^2 + 3 > 0)$$

$$\therefore 0 < a < 2$$

と分かる。

(答) $0 < a < 2$

(3)

C_3 と C_4 の交点の x 座標は、①の方程式を解くことで、

$$2x^2 - 2a^2x + a^4 - 4a = 0$$

$$\therefore x = \frac{a^2 \pm \sqrt{(a^2)^2 - 2(a^4 - 4a)}}{2} = \frac{a^2 \pm \sqrt{8a - a^4}}{2}$$

と分かる。これら2解を α, β ($\alpha < \beta$) とおくと、 C_3 と C_4 で囲まれた部分の面積 $S(a)$ は、

$$S(a) = \int_{\alpha}^{\beta} \{(-x^2 + 2a^2x - 2a^4 + 4a) - (x^2 - a^4)\} dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} (-2x^2 + 2a^2x - a^4 + 4a) dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} -2(x - \alpha)(x - \beta) dx$$

$$= -\frac{2}{6}(\alpha - \beta)^3$$

$$= -\frac{1}{3} \left(\frac{a^2 - \sqrt{8a - a^4}}{2} - \frac{a^2 + \sqrt{8a - a^4}}{2} \right)^3$$

$$= \frac{1}{3}(8a - a^4)^{\frac{3}{2}}$$

と計算できる。従って、 $S(a)$ は $8a - a^4$ が最大となるときに最大となる。 a の関数 $f(a)$ を、

$$f(a) = 8a - a^4 \quad (0 < a < 2)$$

と定めると、

$$f'(a) = 8 - 4a^3 = 4(2 - a^3) = 4 \left(2^{\frac{1}{3}} - a \right) \left(2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}a + a^2 \right)$$

と微分できるが、 $a > 0$ より

$$2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}a + a^2 > 0$$

であるから、

$$f'(a) > 0 \Leftrightarrow a < 2^{\frac{1}{3}}$$

を得る。従って、 $f(a)$ の増減表は以下ようになる。

a	0	...	$2^{\frac{1}{3}}$	...	2
$f'(a)$	$\times$	+	0	-	$\times$
$f(a)$	$\times$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$\times$

増減表より、 $f(a)$ は $a = 2^{\frac{1}{3}}$ のときに最大となることが分かり、その値は、

$$f\left(2^{\frac{1}{3}}\right) = 8 \cdot 2^{\frac{1}{3}} - \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^4 = 8 \cdot 2^{\frac{1}{3}} - 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 6 \cdot 2^{\frac{1}{3}}$$

である。従って、 $S(a)$ は $a = 2^{\frac{1}{3}}$ のときに最大となり、その値は、

$$S\left(2^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3} \left(6 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} = 4\sqrt{3}$$

である。

(答) 最大値: $4\sqrt{3}$, $a = 2^{\frac{1}{3}}$ のとき