

(1)

C が空集合であることを背理法によって示す。つまり、 C が空集合でないと仮定して矛盾を導く。ここで、 $\beta > 0$ より $\frac{1}{\beta} > 0$ であるから、 $\frac{1}{\alpha} = 1 - \frac{1}{\beta} < 1$ となり、 $\alpha > 1$ である。同様にして $\beta > 1$ である。 n は自然数であるから、 $[n\alpha], [n\beta]$ は自然数である。よって C のある要素を c (c は自然数) とおける。このとき、

$$[n_1\alpha] = [n_2\beta] = c$$

を満たすような自然数 n_1, n_2 が存在し、

$$c \leq n_1\alpha < c+1$$

$$c \leq n_2\beta < c+1$$

が成り立つ。ここで、 α, β が無理数であることより、

$$c \neq n_1\alpha, c \neq n_2\beta$$

であるから、

$$c < n_1\alpha < c+1 \Leftrightarrow \frac{n_1}{c+1} < \frac{1}{\alpha} < \frac{n_1}{c}$$

$$c < n_2\beta < c+1 \Leftrightarrow \frac{n_2}{c+1} < \frac{1}{\beta} < \frac{n_2}{c}$$

と変形できる。これら2式の和をとることで、

$$\begin{aligned} \frac{n_1+n_2}{c+1} &< \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < \frac{n_1+n_2}{c} \\ \Leftrightarrow \frac{n_1+n_2}{c+1} &< 1 < \frac{n_1+n_2}{c} \left(\because \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \right) \end{aligned}$$

$$\therefore n_1+n_2-1 < c < n_1+n_2 \quad \dots \textcircled{1}$$

を得る。 n_1, n_2 が自然数であることより、 n_1+n_2-1, n_1+n_2 は連続する自然数となるが、このとき①を満たすような整数 c は存在しないので矛盾する。以上より、 C は空集合であることが背理法により示された。

(証明終)

(2)

E が D の部分集合となることを背理法によって示す。つまり、 E が D の部分集合とならないと仮定して矛盾を導く。このとき、 A の要素でもなく B の要素でもないような E のある要素が存在する。このような E の要素を e ($e=1, 2, \dots, 99$) とおくと、

$$\begin{cases} [m_1\alpha] < e < [(m_1+1)\alpha] \\ [m_2\beta] < e < [(m_2+1)\beta] \end{cases}$$

を満たすような自然数 m_1, m_2 が存在する。これらより、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} m_1\alpha < e, e+1 < (m_1+1)\alpha \\ m_2\beta < e, e+1 < (m_2+1)\beta \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \frac{m_1}{e} < \frac{1}{\alpha} < \frac{m_1+1}{e+1} \\ \frac{m_2}{e} < \frac{1}{\beta} < \frac{m_2+1}{e+1} \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つので、これら2式の和をとることで、

$$\begin{aligned} \frac{m_1+m_2}{e} &< \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < \frac{m_1+m_2+2}{e+1} \\ \Leftrightarrow \frac{m_1+m_2}{e} &< 1 < \frac{m_1+m_2+2}{e+1} \left(\because \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \right) \end{aligned}$$

$$\therefore m_1+m_2 < e < m_1+m_2+1 \quad \dots \textcircled{2}$$

を得る。 m_1, m_2 が自然数であることより、 m_1+m_2, m_1+m_2+1 は連続する自然数となるが、このとき②を満たすような整数 e は存在しないので矛盾する。以上より、 E は D の部分集合となることが背理法により示された。

(証明終)

2

(1)

以下、すべての自然数 n について、

$$a_{n+2} = b_{n+1} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つことを数学的帰納法により示す。

[1] $n=1, 2$ のとき

数列 $\{a_n\}$ の定義より、

$$\begin{aligned} a_3 &= 2a_2 + a_1 = 1 \quad (\because a_1 = 1, a_2 = 0) \\ a_4 &= 2a_3 + a_2 = 2 \quad (\because a_2 = 0, a_3 = 1) \\ b_3 &= 2b_2 + b_1 = 2 \quad (\because b_1 = 0, b_2 = 1) \end{aligned}$$

と計算できるので、

$$a_3 = b_2, a_4 = b_3$$

が成り立つことが分かる。従って、 $n=1, 2$ のとき①は確かに成り立つ。

[2] $n=k, k+1$ での成立を仮定するとき

仮定より、

$$a_{k+2} = b_{k+1}, a_{k+3} = b_{k+2}$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} a_{k+4} &= 2a_{k+3} + a_{k+2} \\ &= 2b_{k+2} + b_{k+1} \quad (\because a_{k+3} = b_{k+2}, a_{k+2} = b_{k+1}) \\ &= b_{k+3} \end{aligned}$$

を得る。従って、 $n=k+2$ のときにも①は成り立つ。

以上[1], [2]より、すべての自然数 n について①が成り立つことが示された。

(証明終)

(2)

まず、関数 $g_n(x)$ について、

$$\begin{aligned} g_1(x) &= f(x) \\ g_2(x) &= g_1(f(x)) = f(f(x)) \\ g_3(x) &= g_2(f(x)) = f(f(f(x))) \\ &\vdots \end{aligned}$$

より、

$$g_k(x) = f(f \cdots (f(x)) \cdots)$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} g_{k+1}(x) &= g_k(f(x)) \\ &= g_{k-1}(f(f(x))) \\ &= g_{k-2}(f(f(f(x)))) \\ &= \dots \\ &= g_1(f(f \cdots f(f(x)) \cdots)) \\ &= f(f(f \cdots (f(x)) \cdots)) \quad (\because g_1(x) = f(x)) \\ &= f(g_k(x)) \quad (\because g_k(x) = f(f \cdots (f(x)) \cdots)) \end{aligned}$$

が成り立つ。以下、すべての自然数 n について、

$$g_n(0) = \frac{a_{n+2}}{b_{n+2}} \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つことを数学的帰納法により示す。

[1] $n=1$ のとき

関数 $g_n(x)$ の定義より、

$$g_1(0) = f(0) = \frac{1}{2} = \frac{a_3}{b_3} \quad (\because a_3 = 1, b_3 = 2b_2 + b_1 = 2)$$

と計算できる。従って、 $n=1$ のとき②は確かに成り立つ。

[2] $n=k$ での成立を仮定するとき

仮定より、

$$g_k(0) = \frac{a_{k+2}}{b_{k+2}}$$

が成り立つ。また、

$$\begin{aligned} g_{k+1}(x) &= g_k(f(x)) \\ &= f(g_k(x)) \\ &= \frac{1}{2 + g_k(x)} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} g_{k+1}(0) &= \frac{1}{2 + g_k(0)} \\ &= \frac{1}{2 + \frac{a_{k+2}}{b_{k+2}}} \quad \left(\because g_k(0) = \frac{a_{k+2}}{b_{k+2}} \right) \\ &= \frac{b_{k+2}}{2b_{k+2} + a_{k+2}} \\ &= \frac{a_{k+3}}{2b_{k+2} + b_{k+1}} \quad (\because b_{k+2} = a_{k+3}, a_{k+2} = b_{k+1}) \\ &= \frac{a_{k+3}}{b_{k+3}} \quad (\because 2b_{k+2} + b_{k+1} = b_{k+3}) \end{aligned}$$

を得る。従って、 $n=k+1$ のときにも②は成り立つ。

以上[1], [2]より、すべての自然数 n について②が成り立つことが示された。

(証明終)

(3)

(2)の結果より、

$$c_n = g_n(0) = \frac{a_{n+2}}{b_{n+2}}$$

と変形できる。ここで、数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の特性方程式はともに、

$$t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$\therefore t = 1 \pm \sqrt{2}$$

と解くことができるから、

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= 2b_{n+1} + b_n \\ \Leftrightarrow b_{n+2} - (1 - \sqrt{2})b_{n+1} &= (1 + \sqrt{2}) \{ b_{n+1} - (1 - \sqrt{2})b_n \} \\ \Leftrightarrow b_{n+2} - (1 - \sqrt{2})b_{n+1} &= (1 + \sqrt{2})^n \{ b_2 - (1 - \sqrt{2})b_1 \} \\ \therefore b_{n+2} - (1 - \sqrt{2})b_{n+1} &= (1 + \sqrt{2})^n \quad (\because b_1 = 0, b_2 = 1) \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= 2b_{n+1} + b_n \\ \Leftrightarrow b_{n+2} - (1 + \sqrt{2})b_{n+1} &= (1 - \sqrt{2}) \{ b_{n+1} - (1 + \sqrt{2})b_n \} \\ \Leftrightarrow b_{n+2} - (1 + \sqrt{2})b_{n+1} &= (1 - \sqrt{2})^n \{ b_2 - (1 + \sqrt{2})b_1 \} \\ \therefore b_{n+2} - (1 + \sqrt{2})b_{n+1} &= (1 - \sqrt{2})^n \quad (\because b_1 = 0, b_2 = 1) \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

を得る。③、④の差をとることで、

$$\begin{aligned} -(1 - \sqrt{2})b_{n+1} + (1 + \sqrt{2})b_{n+1} &= (1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \\ \therefore b_{n+1} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \{ (1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \} \end{aligned}$$

と分かり、これより、

$$a_{n+2} = b_{n+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \{ (1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \}$$

となる。従って、

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{a_{n+2}}{b_{n+2}} \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}} \{ (1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \}}{\frac{1}{2\sqrt{2}} \{ (1 + \sqrt{2})^{n+1} - (1 - \sqrt{2})^{n+1} \}} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)^n}{1 + \sqrt{2} - (1 - \sqrt{2}) \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)^n} \end{aligned}$$

と表すことができ、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)^n = 0$$

より、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} c_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)^n}{1 + \sqrt{2} - (1 - \sqrt{2}) \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)^n} \\ &= \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} \\ &= \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

と求められる。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \sqrt{2} - 1$

(1)

3点O, A, Pが一直線上にないことを背理法で示す。つまり、3点O, A, Pが一直線上にあると仮定して矛盾を導く。

$$\overrightarrow{OA} = (1, 0, 0)$$

であるから、3点O, A, Pが一直線上にあるとすると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= k\overrightarrow{OA} \\ \Leftrightarrow \left(s, t, \frac{4}{t}\right) &= (k, 0, 0)\end{aligned}$$

を満たすようなある実数 k が存在する。この y 成分を比較することで、

$$t = 0$$

と分かるが、このとき $1 < t < 5$ を満たさないため矛盾する。従って、3点O, A, Pは一直線上にないことが示された。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PO}||\overrightarrow{PA}|\cos\angle OPA &= \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PA} \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{PO}||\overrightarrow{PA}|\cos\angle OPA &= \left(-s, -t, -\frac{4}{t}\right) \cdot \left(1-s, -t, -\frac{4}{t}\right) \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{PO}||\overrightarrow{PA}|\cos\angle OPA &= s^2 - s + t^2 + \frac{16}{t^2} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $1 < t < 5$ より、

$$s^2 - s + t^2 + \frac{16}{t^2} > s^2 - s + 1^2 + \frac{16}{t^2} = \left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} + \frac{16}{t^2} > 0$$

であるから、これと①式より、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PO}||\overrightarrow{PA}|\cos\angle OPA &> 0 \\ \therefore \cos\angle OPA &> 0 \quad (\because |\overrightarrow{PO}||\overrightarrow{PA}| > 0)\end{aligned}$$

を得るので、 $\angle OPA$ は鋭角であることが示された。

(証明終)

(3)

点Pから直線OAに下ろした垂線の足をHとすると、 $H(s, 0, 0)$ である。 $\triangle OAP$ の面積を S とすると、

$$S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot PH = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{t^2 + \left(\frac{4}{t}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{t^2 + \frac{16}{t^2}}$$

と表すことができる。ここで、相加・相乗平均の関係より

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{t^2 + \frac{16}{t^2}} \geq \frac{1}{2} \sqrt{2\sqrt{t^2} \cdot \frac{16}{t^2}} = \sqrt{2}$$

が成り立つ。この等号成立条件は、

$$\begin{aligned}t^2 &= \frac{16}{t^2} \\ \therefore t &= \pm 2\end{aligned}$$

であるが、このうち $t=2$ は $1 < t < 5$ を満たすので、 S は $t=2$ で最小値 $S=\sqrt{2}$ をとることが分かる。

(答) $\sqrt{2}$

(4)

(3)より、 $\triangle OAP$ の面積が最小となるとき、 $P(s, 2, 2)$ である。3点O, A, Pの定める平面に垂直な単位ベクトルを、

$$\vec{n} = (x, y, z) \quad (\text{ただし、} x^2 + y^2 + z^2 = 1)$$

とおくと、

$$\begin{aligned}\begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{OP} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (1, 0, 0) \cdot (x, y, z) = 0 \\ (s, 2, 2) \cdot (x, y, z) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ sx + 2y + 2z = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \end{cases}\end{aligned}$$

が成り立つ。これと $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ より、

$$\begin{aligned}0^2 + y^2 + (-y)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 2y^2 &= 1 \\ \therefore y &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

が得られ、これより、

$$z = -y = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{複号同順})$$

となる。従って、求める単位ベクトルは、

$$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

である。

(答) $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

4

(1)

関数 $f(x)$ を微分すると、

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

となるので、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} &= \sqrt{2}x \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

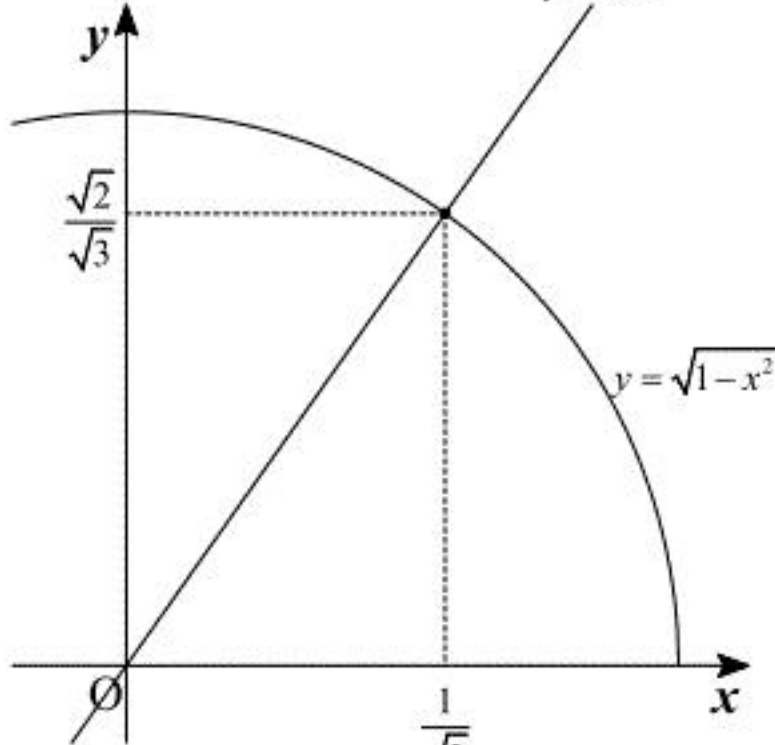
が成り立つ。この両辺を 2 乗すると、

$$\begin{aligned} 1-x^2 &= 2x^2 \\ \therefore x &= \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

となるが、このうち $-1 \leq x \leq 1$ と $\textcircled{1}$ をともに満たすものは、

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

である。よって、 $y = \sqrt{1-x^2}$ と $y = \sqrt{2}x$ のグラフは以下になる。



上図より、 $-1 < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき、 $f'(x) > 0$ 、 $\frac{1}{\sqrt{3}} < x < 1$ のとき、 $f'(x) < 0$ となる。従って、

$f(x)$ の増減表は以下になる。

x	-1	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

ここで、

$$\begin{aligned} f(-1) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ f(1) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

が成り立つので、これと増減表より、 $f(x)$ は、

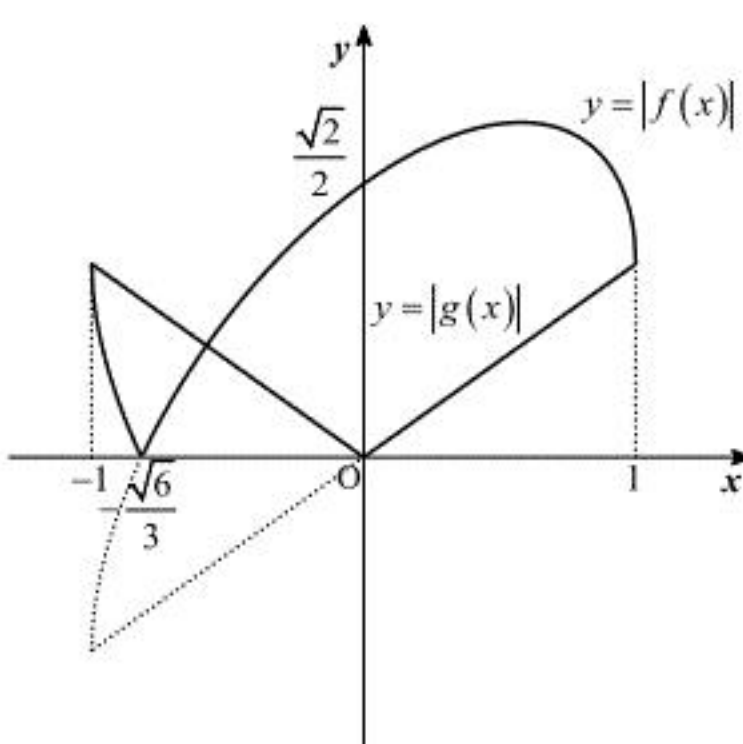
$$\begin{aligned} x = -1 \text{ で最小値: } f(-1) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ で最大値: } f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

をとることが分かる。

$$\text{(答) 最大値: } \frac{\sqrt{6}}{2}, \text{ 最小値: } -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2)

(1) の増減表より、関数 $y = |f(x)|$ 、 $y = |g(x)|$ は以下の図のようになっている。



グラフより、 $0 \leq x \leq 1$ において不等式 $|f(x)| > |g(x)|$ は、 $x = 1$ を除くすべての点で成り立つ。

また、 $-1 \leq x < 0$ における $y = |f(x)|$ 、 $y = |g(x)|$ の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{1-x^2} &= -\frac{\sqrt{2}}{2}x \\ \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} &= -\sqrt{2}x \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

の解であるから、この両辺を 2 乗することで、

$$\begin{aligned} 1-x^2 &= 2x^2 \\ \therefore x &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\because -1 \leq x < 0) \end{aligned}$$

となり、これは $\textcircled{2}$ を満たす。これより、 $-1 \leq x < 0$ において、

$$|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < 0$$

であることが分かるので、 $0 \leq x \leq 1$ における結果も合わせると、求める解は、

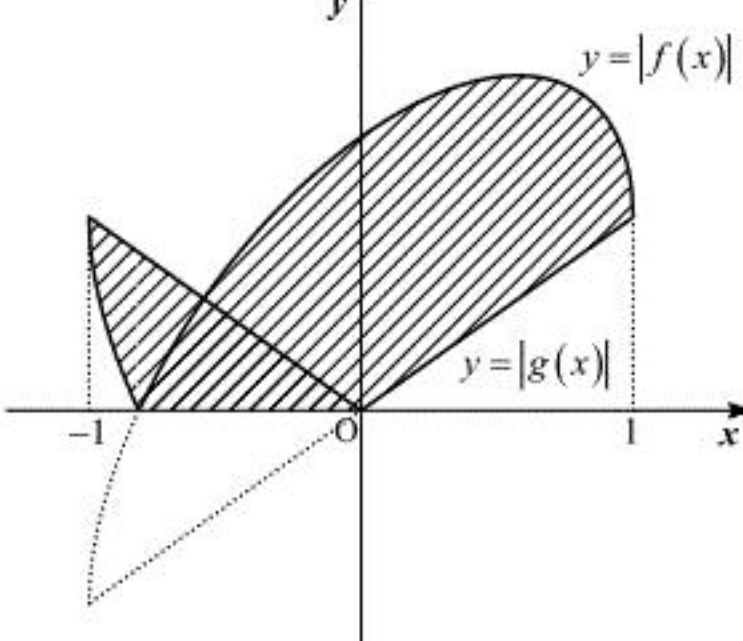
$$-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < 1$$

である。

$$\text{(答) } -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < 1$$

(3)

求める体積 V は、以下の図の斜線部を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積である。



ここで、 $f(x) = 0$ を満たす x ($-1 < x < 0$) は、

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{1-x^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} &= -\frac{x}{\sqrt{2}} \quad \dots\dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

の解であるが、これを 2 乗することで、

$$\begin{aligned} 1-x^2 &= \frac{x^2}{2} \\ \therefore x &= -\frac{\sqrt{6}}{3} \quad (\because -1 < x < 0) \end{aligned}$$

となり、これは $\textcircled{3}$ を満たす。これと図より、

$$V = \int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} \pi |g(x)|^2 dx + \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \pi |f(x)|^2 dx - \int_{-1}^{-\frac{\sqrt{6}}{3}} \pi |f(x)|^2 dx - \int_0^1 \pi |g(x)|^2 dx$$

と表すことができる。ここで、

$$\begin{aligned} \int |f(x)|^2 dx &= \int \left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \sqrt{1-x^2} \right)^2 dx \\ &= \int \left(\sqrt{2}x\sqrt{1-x^2} + 1 - \frac{x^2}{2} \right) dx \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} + x - \frac{x^3}{6} + C_1 \quad (C_1 \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

$$\int |g(x)|^2 dx = \int \left(-\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 dx = \frac{x^3}{6} + C_2 \quad (C_2 \text{ は積分定数})$$

であるから、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} \pi |g(x)|^2 dx &= \pi \left[\frac{x^3}{6} \right]_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{18\sqrt{3}} \\ \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \pi |f(x)|^2 dx &= \pi \left[-\frac{\sqrt{2}}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} + x - \frac{x^3}{6} \right]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 = \frac{5}{6}\pi + \frac{25}{18\sqrt{3}}\pi \\ \int_{-1}^{-\frac{\sqrt{6}}{3}} \pi |f(x)|^2 dx &= \pi \left[-\frac{\sqrt{2}}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} + x - \frac{x^3}{6} \right]_{-1}^{-\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{5}{6}\pi - \frac{\sqrt{6}}{3}\pi \\ \int_0^1 \pi |g(x)|^2 dx &= \pi \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

と計算できるため、

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} \pi |g(x)|^2 dx + \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \pi |f(x)|^2 dx - \int_{-1}^{-\frac{\sqrt{6}}{3}} \pi |f(x)|^2 dx - \int_0^1 \pi |g(x)|^2 dx \\ &= \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{18\sqrt{3}} \right) + \left(\frac{5}{6}\pi + \frac{25}{18\sqrt{3}}\pi \right) - \left(\frac{5}{6}\pi - \frac{\sqrt{6}}{3}\pi \right) - \frac{\pi}{6} \\ &= \left(\frac{4\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \pi \end{aligned}$$

と求めることができる。

$$\text{(答) } V = \left(\frac{4\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \pi$$