

平成28年度 前期日程
入学者選抜学力検査問題

環境・情報科学科
数 学

〔注 意〕

- 1 机上に受験票を提示しておくこと。
- 2 監督者の指示があるまで、この問題冊子を開いてはいけない。
- 3 解答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。
- 4 解答用紙に受験番号および氏名を必ず記入すること。
- 5 この冊子の問題は4ページからなっている。
- 6 解答用紙は4枚ある。
- 7 下書き用紙は4枚ある。
- 8 この問題冊子のうち、落丁・乱丁および印刷不鮮明な箇所があれば、手をあげて申し出ること。
- 9 この問題の内容に関する質問には答えない。
- 10 試験開始後60分経過しないと退室できない。退室するときには、解答用紙を机上に置き、問題冊子、下書き用紙は持ち帰ること。

1 α, β を正の無理数とする. 2つの集合 A, B を

$$A = \{ [n\alpha] \mid n = 1, 2, 3, \dots \}$$

$$B = \{ [n\beta] \mid n = 1, 2, 3, \dots \}$$

で定める. 集合 C を A と B の共通部分とする. 集合 D を A と B の和集合とする. $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ のとき以下の問いに答えよ. ただし, 実数 x に対して, x を超えない最大の整数を $[x]$ と表す.

(1) C は空集合となることを示せ.

(2) $E = \{ n \mid n = 1, 2, 3, \dots, 99 \}$ のとき, E は D の部分集合となることを示せ.

(配点 100 点)

2 2つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を

$$a_1 = 1, b_1 = 0, a_2 = 0, b_2 = 1$$

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_{n+2} = 2b_{n+1} + b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める. 関数 $f(x) = \frac{1}{2+x}$ に対し, 関数 $g_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を

$$g_1(x) = f(x)$$

$$g_{n+1}(x) = g_n(f(x)) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める. 以下の問いに答えよ.

(1) $a_{n+2} = b_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) となることを示せ.

(2) $g_n(0) = \frac{a_{n+2}}{b_{n+2}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) となることを示せ.

(3) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n = g_n(0)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定めるとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ を求めよ.

(配点 100 点)

3 s を実数とする. $1 < t < 5$ とする. O を原点とする xyz 空間内に 2 点 $A(1, 0, 0)$, $P\left(s, t, \frac{4}{t}\right)$ がある. 以下の問いに答えよ.

(1) 3 点 O, A, P は一直線上にないことを示せ.

(2) $\angle OPA$ は鋭角であることを示せ.

(3) $\triangle OAP$ の面積の最小値を求めよ.

(4) $\triangle OAP$ の面積が最小となるとき, 3 点 O, A, P の定める平面に垂直な単位ベクトルをすべて求めよ.

(配点 100 点)

- 4 2つの関数を $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{1-x^2}$ ($-1 \leq x \leq 1$), $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ とする. xy 平面上に, 曲線 $C: y = f(x)$, 直線 $\ell: y = g(x)$ がある. C と ℓ で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ.
- (2) $-1 \leq x \leq 1$ のとき, 不等式 $|f(x)| > |g(x)|$ を解け.
- (3) V の値を求めよ.

(配点 100 点)