

(1)

$$x = -5 - 2\sqrt{7} \Leftrightarrow x + 5 = -2\sqrt{7}$$

となるが、これを両辺二乗して、

$$(x+5)^2 = 28 \Leftrightarrow x^2 + 10x - 3 = 0$$

となるため、 $x^2 + 10x - 3 = 0$ は $x = -5 - 2\sqrt{7}$ を解にもつ x についての方程式である。ここで、

$$\begin{aligned} P &= x^4 + 9x^3 - 12x^2 + 9x - 3 \\ &= (x^2 + 10x - 3)(x^2 - x + 1) - 4x \end{aligned}$$

となるから、 $x = -5 - 2\sqrt{7}$ のとき、

$$P = -4x = 20 + 8\sqrt{7}$$

となる。

(答) $20 + 8\sqrt{7}$

(2)

$$\begin{aligned} 2x^2 + xy - 5x - y^2 + y - 30 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x - y)(x + y) - 5x + y - 30 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x - y - 1)(x + y - 2) &= 32 \end{aligned}$$

となる。ここで、 x, y が自然数であるから、 $x + y - 2$ 、 $2x - y - 1$ は整数であり、 $x + y - 2 \geq 0$ である。よって、

$$\begin{aligned} (2x - y - 1, x + y - 2) &= (1, 32), (2, 16), (4, 8), (8, 4), (16, 2), (32, 1) \\ \Leftrightarrow (x, y) &= (12, 22), (7, 11), (5, 5), (5, 1), (7, -3), (12, -9) \end{aligned}$$

となるが、 y が自然数であるので、条件を満たすのは、

$$(x, y) = (12, 22)(7, 11)(5, 5)(5, 1)$$

となる。

(答) $(x, y) = (12, 22), (7, 11), (5, 5), (5, 1)$

(3)

$\sin \theta = t$ とおくと、

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 1 - \sin^2 \theta + 6a \sin \theta + 8a - 2 \\ &= -t^2 + 6at + 8a - 1 \end{aligned}$$

となる。また、 $0 \leq \theta \leq \pi$ より $0 \leq t \leq 1$ となる。よって、 $g(t) = -t^2 + 6at + 8a - 1$ が $0 \leq t \leq 1$ に解を持つような a の値の範囲を求めればよい。

[1] $g(0)g(1) \leq 0$ のとき

このようになるのは

$$(8a - 1)(14a - 2) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq a \leq \frac{1}{7}$$

のときである。このとき、 $y = g(t)$ のグラフは $0 \leq t \leq 1$ で t 軸と交わる。よって、 $g(t) = 0$ は $0 \leq t \leq 1$ に解を持つ。

[2] $g(0)g(1) > 0$ のとき

このようになるのは

$$(8a - 1)(14 - 2) > 0 \Leftrightarrow a < \frac{1}{8}, \frac{1}{7} < a$$

のときである。また、 $y = g(t)$ のグラフは上に凸な放物線であるから、そのグラフが $0 \leq t \leq 1$ で交わるのは、軸が $0 \leq t \leq 1$ にあり、頂点での値が非負で、 $g(0)$ と $g(1)$ がともに負であるときである。頂点での値は

$$g(3a) = 9a^2 + 8a - 1 = (9a - 1)(a + 1)$$

である。よって

$$0 \leq 3a \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq \frac{1}{3}$$

$$g(3a) \geq 0 \Leftrightarrow a \leq -1, \frac{1}{9} \leq a$$

$$g(0) < 0 \Leftrightarrow a < \frac{1}{8}$$

$$g(1) < 0 \Leftrightarrow a < \frac{1}{7}$$

となり、合わせると

$$\frac{1}{9} \leq a < \frac{1}{8}$$

となる。

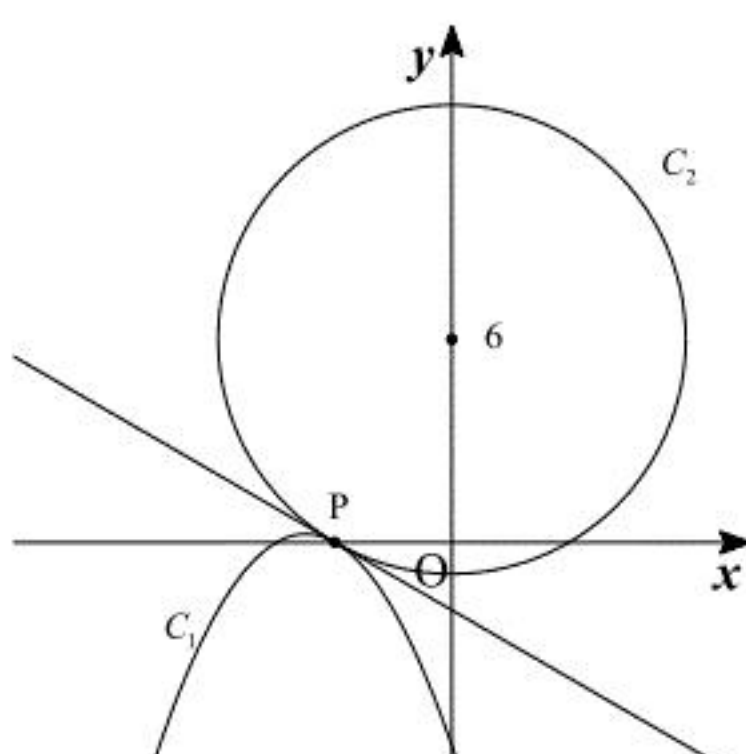
以上[1], [2]より、求める a の値の範囲は

$$\frac{1}{9} \leq a \leq \frac{1}{7}$$

である。

(答) $\frac{1}{9} \leq a \leq \frac{1}{7}$

(1)



$$y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{5\sqrt{3}}{3}x - 6$$

であるから,

$$y' = -\frac{2}{3}x - \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

となる。よって、点Pにおける接線の傾きは $-\frac{2}{3}\alpha - \frac{5\sqrt{3}}{3}$ となるので、法線ベクトルの一つは、

$$\left(\frac{2}{3}\alpha + \frac{5\sqrt{3}}{3}, 1 \right)$$

となる。 $\alpha = -\frac{5\sqrt{3}}{2}$ のとき、法線ベクトルはy軸と並行になり、その式は $x = -\frac{5\sqrt{3}}{2}$ となる。こ

のとき、A(0, 6)は法線上にないから C_1 と C_2 が接することはない、 $\alpha \neq -\frac{5\sqrt{3}}{2}$ である。よって

これはy軸と平行ではないから、点Pにおける法線は

$$y = \frac{1}{\frac{2}{3}\alpha + \frac{5\sqrt{3}}{3}}(x - \alpha) - \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{5\sqrt{3}}{3}\alpha - 6$$

と表すことができる。これが、(0, 6)を通るから、

$$6 = \frac{1}{\frac{2}{3}\alpha + \frac{5\sqrt{3}}{3}}(0 - \alpha) - \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{5\sqrt{3}}{3}\alpha - 6$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^3 + 15\sqrt{3}\alpha^2 + 156\alpha + 180\sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + 2\sqrt{3})(2\alpha^2 + 11\sqrt{3}\alpha + 90) = 0$$

となる。ここで、

$$2\alpha^2 + 11\sqrt{3}\alpha + 90 = 2\left(\alpha + \frac{11\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \frac{357}{8} > 0$$

であるから、

$$(\alpha + 2\sqrt{3})(2\alpha^2 + 11\sqrt{3}\alpha + 90) = 0 \Leftrightarrow \alpha + 2\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2\sqrt{3}$$

となる。また点Pは C_1 上の点であるので、

$$\beta = -\frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{5\sqrt{3}}{3}\alpha - 6 = 0$$

となり、確かに示された。

(証明終)

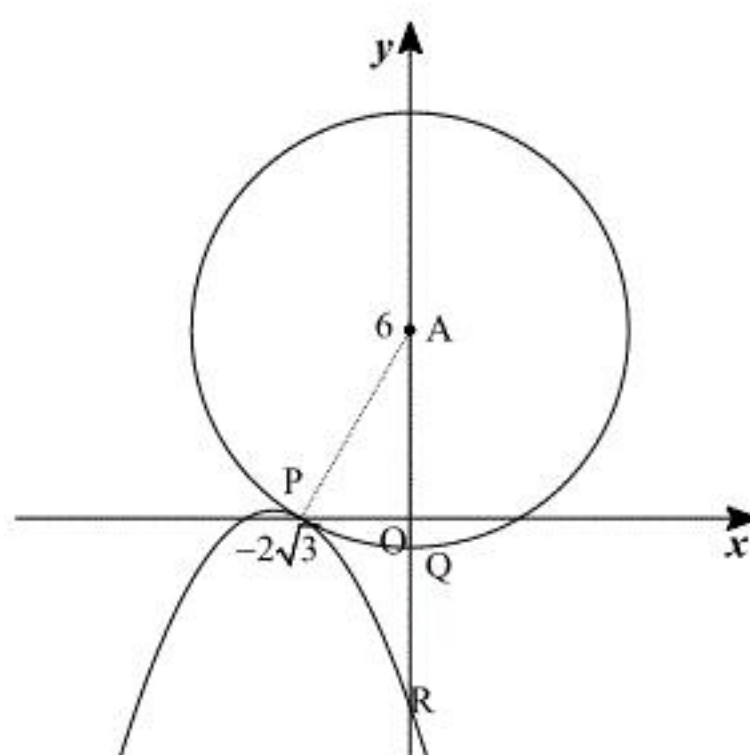
(2)

円の半径 r は、

$$r = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{3}$$

となる。よって、 C_2 は $(0, 6 - 4\sqrt{3})$ を通りこの点を点Qとする。 $AP = 4\sqrt{3}$, $OA = 6$, $OP = 2\sqrt{3}$ より、

$OP : AP : OA = 1 : 2 : \sqrt{3}$ であるから、 $\angle PAO = 30^\circ$ となる。また、 C_1 とy軸との交点をRとすると、



上図より、求める面積は、

$$(\text{線分OP, ORと}C_1\text{で囲まれた面積}) - (\text{扇形PAQ}) + (\triangle PAO)$$

となるから、

$$\begin{aligned} \int_{-2\sqrt{3}}^0 \left| -\frac{1}{3}x^2 - \frac{5\sqrt{3}}{3}x - 6 \right| dx - \frac{1}{2}r^2 \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 6 &= \int_{-2\sqrt{3}}^0 \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{5\sqrt{3}}{3}x + 6 \right) dx - 4\pi + 6\sqrt{3} \\ &= \left[\frac{1}{9}x^3 + \frac{5\sqrt{3}}{6}x^2 + 6x \right]_{-2\sqrt{3}}^0 - 4\pi + 6\sqrt{3} \\ &= \frac{14}{3}\sqrt{3} - 4\pi + 6\sqrt{3} \\ &= \frac{32}{3}\sqrt{3} - 4\pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{32}{3}\sqrt{3} - 4\pi$

(1)

第 m 群の第 s 項 (s は $1 \leq s \leq m$ を満たす整数) は 2^{s-1} と表せる。ここで

$$1024 = 2^{10}$$

であるから、1024 が初めて現れるのは第11群の最後である。よって、求める k の最小値は、

$$k = 1 + 2 + 3 + \cdots + 11 = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 12 = 66$$

となる。

(答) $k = 66$

(2)

第 m 群の項の和は、

$$\sum_{s=1}^m 2^{s-1} = \frac{2^m - 1}{2 - 1} = 2^m - 1$$

となる。よって、第 m 群までの項の総和は、

$$\sum_{k=1}^m (2^k - 1) = \frac{2(2^m - 1)}{2 - 1} - m = 2^{m+1} - m - 2$$

となる。

$$2^{10+1} - 10 - 2 = 2036 > 2000$$

であり、第10群の最後の項は

$$2^{10-1} = 512$$

であるから、第10群の9項目までの和は $2036 - 512 = 1524 < 2000$ となる。したがって、求める l は第10群の9項目までの項数である。よって、

$$l = 1 + 2 + 3 + \cdots + 9 + 9 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 + 9 = 54$$

となる。

(答) $l = 54$