

1

(1)

積和の公式を利用すると、

$$x_i x_j = 4 \cos \frac{2i}{17} \pi \cos \frac{2j}{17} \pi = 2 \left\{ \cos \frac{2(i-j)}{17} \pi + \cos \frac{2(i+j)}{17} \pi \right\} = x_{i-j} + x_{i+j} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

となる。また、

$$2 \cos \left(\frac{2n}{17} \pi \right) = 2 \cos \left(2\pi - \frac{2n}{17} \pi \right) = 2 \cos \left(\frac{2(17-n)}{17} \pi \right) \\ \Leftrightarrow x_n = x_{17-n} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

であるとわかる。よって、

$$\begin{aligned} x_1(s+1) &= x_1 + \sum_{k=1}^s x_k x_1 \\ &= x_1 + \sum_{k=1}^s (x_{k-1} + x_{k+1}) \\ &= x_1 + (x_0 + x_1 + \cdots + x_7) + (x_2 + x_3 + \cdots + x_9) \\ &= 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_7) + x_0 + x_8 + x_9 \\ &= 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_7 + x_8) + x_0 \\ &= 2s + x_0 \end{aligned}$$

となるが、

$$x_0 = 2 \cos 0 = 2$$

となるから、たしかに

$$x_1(s+1) = 2s + x_0 = 2s + 2$$

となり、示せた。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned} t^2 &= (x_1 + x_2 + x_4 + x_8)^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_4^2 + x_8^2 + 2(x_1 x_2 + x_1 x_4 + x_1 x_8 + x_2 x_4 + x_2 x_8 + x_4 x_8) \end{aligned}$$

となる。ここで①、②より

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_4^2 + x_8^2 &= x_0 + x_2 + x_0 + x_4 + x_0 + x_8 + x_0 + x_{16} \\ &= 4x_0 + x_2 + x_4 + x_8 + x_1 \\ &= 8 + x_2 + x_4 + x_8 + x_1 \\ &= 8 + t \end{aligned}$$

となる。また①、②より

$$\begin{aligned} 2(x_1 x_2 + x_1 x_4 + x_1 x_8 + x_2 x_4 + x_2 x_8 + x_4 x_8) &= 2(x_1 + x_3 + x_3 + x_3 + x_7 + x_9 + x_2 + x_6 + x_6 + x_{10} + x_4 + x_{12}) \\ &= 2(x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 2x_7 + x_8) \\ &= 2(2s - t) \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned} t^2 &= 8 + t + 2(2s - t) \\ &= 8 + 4s - t \end{aligned}$$

となるが、(1)より

$$\begin{aligned} x_1(s+1) &= 2s + 2 \\ \Leftrightarrow (s+1)(x_1 - 2) &= 0 \end{aligned}$$

となるが、 $x_1 \neq 2$ であるから、 $s = -1$ となる。これより、

$$t^2 = 8 + 4s - t = 4 - t$$

となり、 $t^2 + t - 4 = 0$ となることが示された。

(証明終)

(3)

(2)より、 $t^2 + t - 4 = 0$ であるから、 $t = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$ となる。ここで、

$$0 < \frac{2}{17} \pi < \frac{4}{17} \pi < \frac{1}{3} \pi < \frac{8}{17} \pi < \frac{1}{2} \pi < \frac{16}{17} \pi < \pi$$

より、

$$-2 < x_8 < 0 < x_4 < 1 < x_2 < x_1 < 2$$

となる。これより、 $t > 0$ となり、 $t = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$ となる。ここで、

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 + x_2 + x_8 &= \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ (x_1 + x_4) \cdot (x_2 + x_8) &= x_1 x_2 + x_2 x_4 + x_1 x_8 + x_4 x_8 \\ &= x_1 + x_3 + x_2 + x_6 + x_7 + x_9 + x_4 + x_{12} \\ &= x_1 + x_3 + x_2 + x_6 + x_7 + x_8 + x_4 + x_5 \\ &= s \\ &= -1 \end{aligned}$$

となる。よって、 $x_1 + x_4$ 、 $x_2 + x_8$ は y に関する2次方程式

$$y^2 - ty - 1 = 0$$

の解になる。よって、

$$y = \frac{t \pm \sqrt{t^2 + 4}}{2}$$

となるが、 $x_1 + x_4 > 0$ より、

$$x_1 + x_4 = \frac{t + \sqrt{t^2 + 4}}{2}$$

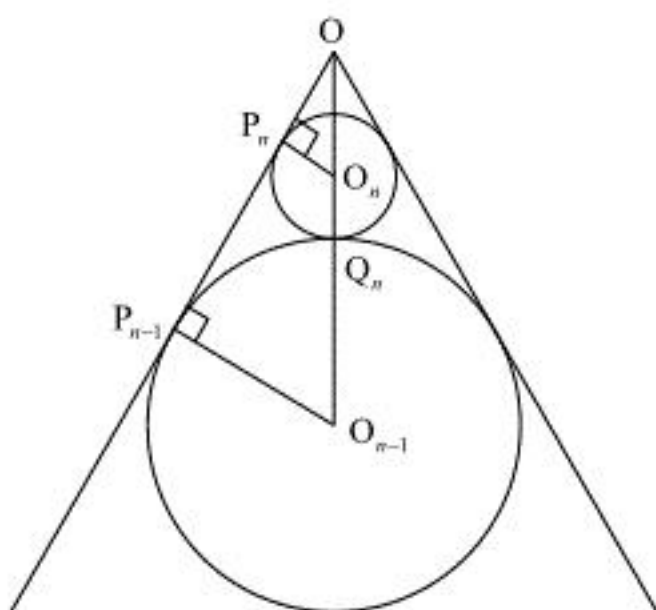
となり、

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= \frac{t + \sqrt{t^2 + 4}}{2} \\ &= \frac{t + \sqrt{-t + 8}}{2} \quad (\because t^2 + t - 4 = 0) \\ &= \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{17 - \sqrt{17}}{2}} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad x_1 + x_4 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{17 - \sqrt{17}}{2}}$$

(1)



C_n の半径を r_n 、 C_n の中心を O_n 、 C_n と OA の接線を P_n 、 C_n と C_{n-1} の接点を Q_n とする。すると、
 OO_n は $\angle AOB$ の二等分線になり、 $\angle O_nOP_n = 30^\circ$ になる。よって、

$$OO_n : O_nP_n : P_nO = 1 : \sin 30^\circ : \cos 30^\circ = 2 : 1 : \sqrt{3}$$

となる。同様にして、

$$OO_{n-1} : O_{n-1}P_{n-1} : P_{n-1}O = 2 : 1 : \sqrt{3}$$

となる。これより、

$$OO_n = 2r_n$$

$$OO_{n-1} = 2r_{n-1}$$

となるが、

$$O_nO_{n-1} = r_{n-1} + r_n$$

であるから、

$$2(r_{n-1} - r_n) = r_{n-1} + r_n \Leftrightarrow r_n = \frac{1}{3}r_{n-1}$$

となる。よって、

$$r_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} r_1$$

となるから、

$$r_k < 0.001r_1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} r_1 < \frac{1}{1000} r_1$$

$$\Leftrightarrow 1000 < 3^{k-1} \quad (\because r_1 > 0)$$

となる最小の k を求めればよい。ここで、

$$3^6 = 729, 3^7 = 2187$$

であるから、求める最小の k は、

$$k-1=7 \Leftrightarrow k=8$$

となる。

(答) $k=8$

(2)

$\triangle OAB$ の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$$

である。また、 O_1 は $\triangle OAB$ の内心であるから r_1 を用いて、

$$\frac{1}{2} \cdot r_1 \cdot (2+2+2) = 3r_1$$

と表すこともできる。よって、

$$3r_1 = \sqrt{3} \Leftrightarrow r_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

となる。これより、

$$r_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

であるから

$$s_n = \pi r_n^2 = \frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$$

となる。 $0 < \frac{1}{9} < 1$ であるから、無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ は収束して、

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n = \frac{\frac{\pi}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{8} \pi$$

となる。

(答) $\frac{3}{8} \pi$

(1)

点 P, Q はそれぞれ直線 ℓ_1, ℓ_2 上の点であるから, 実数 s, t を用いて,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{m_1} = (3+t, -3+2t, -3+t) \\ \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{m_2} = (3-s, -1+s, 3+s)\end{aligned}$$

と表せる。よって,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PQ}|^2 &= |\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}|^2 \\ &= (t+s)^2 + (2t-s-2)^2 + (t-s-6)^2 \\ &= 6t^2 - 4ts - 20t + 3s^2 + 16s + 40 \\ &= 6\left(t - \frac{s+5}{3}\right)^2 + \frac{7}{3}s^2 + \frac{28}{3}s + \frac{70}{3} \\ &= 6\left(t - \frac{s+5}{3}\right)^2 + \frac{7}{3}(s+2)^2 + 14\end{aligned}$$

となる。よって,

$$t - \frac{s+5}{3} = 0, s+2=0 \Leftrightarrow s=-2, t=1$$

となるときに最小値をとる。このとき,

$$P(4, -1, -2), Q(5, -3, 1)$$

となる。

(答) $P(4, -1, -2), Q(5, -3, 1)$

(2)

$\triangle OPQ$ の面積は,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2|\overrightarrow{OQ}|^2 - (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ})^2} &= \frac{1}{2}\sqrt{21 \cdot 35 - 21^2} \\ &= \frac{7}{2}\sqrt{6}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{7}{2}\sqrt{6}$

(3)

H が $\triangle OPQ$ のどの辺に存在するかで場合分けをする。

[i] 点 H が辺 OP 上に存在する場合

点 H は $0 \leq k \leq 1$ を満たす実数 k を用いて,

$$H(4k, -k, -2k)$$

と表すことができる。よって,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OH} \\ &= (\alpha - 4k, 1+k, 1+2k)\end{aligned}$$

となる。これが平面 π に垂直であるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{OP} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\alpha - 4k, 1+k, 1+2k) \cdot (4, -1, -2) &= 0 \\ \Leftrightarrow -21k + 4\alpha - 3 &= 0 \\ \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{OQ} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\alpha - 4k, 1+k, 1+2k) \cdot (5, -3, 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow -21k + 5\alpha - 2 &= 0\end{aligned}$$

となる。これより, $\alpha = -1, k = -\frac{1}{3}$ となるが, $0 \leq k \leq 1$ を満たさないので不適である。

[ii] 点 H が辺 OQ 上に存在する場合

点 H は $0 \leq k \leq 1$ を満たす実数 k を用いて,

$$H(5k, -3k, k)$$

と表すことができる。よって,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OH} \\ &= (\alpha - 5k, 1+3k, 1-k)\end{aligned}$$

となる。これが平面 π に垂直であるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{OP} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\alpha - 5k, 1+3k, 1-k) \cdot (4, -1, -2) &= 0 \\ \Leftrightarrow -21k + 4\alpha - 3 &= 0 \\ \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{OQ} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\alpha - 5k, 1+3k, 1-k) \cdot (5, -3, 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow -35k + 5\alpha - 2 &= 0\end{aligned}$$

となる。これより, $\alpha = \frac{9}{5}, k = \frac{1}{5}$ となるが, $0 \leq k \leq 1$ を満たし適する。

[3] 点 H が辺 PQ 上に存在する場合

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (5, -3, 1) - (4, -1, -2) = (1, -2, 3)$$

より, 点 H は $0 \leq k \leq 1$ を満たす実数 k を用いて,

$$H(k+4, -2k-1, 3k-2)$$

と表すことができる。よって,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OH} \\ &= (\alpha - k - 4, 2+2k, 3-3k)\end{aligned}$$

となる。これが平面 π に垂直であるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{OP} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\alpha - k - 4, 2+2k, 3-3k) \cdot (4, -1, -2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha &= 6 \\ \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{OQ} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\alpha - k - 4, 2+2k, 3-3k) \cdot (5, -3, 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow -14k + 5\alpha - 23 &= 0\end{aligned}$$

となる。これより, $\alpha = 6, k = \frac{1}{2}$ となるが, $0 \leq k \leq 1$ を満たし適する。

以上[i], [2], [3]より,

$$\alpha = \frac{9}{5}, 6$$

となる。

(答) $\alpha = \frac{9}{5}, 6$

4

(1)

$$3xf\left(x\right)+3\int_1^xf\left(t\right)dt=4x^3+3\int_1^2f\left(t\right)dt\cdots\cdots\textcircled{1}$$

を両辺微分して、

$$\begin{aligned}3f\left(x\right)+3xf'\left(x\right)+3f\left(x\right)&=12x^2\\ \Leftrightarrow 2f\left(x\right)+xf'\left(x\right)&=4x^2\end{aligned}$$

となる。これに両辺 x をかけて、

$$\begin{aligned}2xf\left(x\right)+x^2f'\left(x\right)&=4x^3\\ \Leftrightarrow \left\{x^2f\left(x\right)\right\}'&=4x^3\end{aligned}$$

となることから、 C を積分定数として、

$$\begin{aligned}x^2f\left(x\right)&=\int 4x^3dx\\ &=x^4+C\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\textcircled{1}$ に $x=2$ を代入して、

$$\begin{aligned}6f\left(2\right)+3\int_1^2f\left(t\right)dt&=32+3\int_1^2f\left(t\right)dt\\ \Leftrightarrow f\left(2\right)&=\frac{16}{3}\end{aligned}$$

となり、 $x=2$ を $x^2f\left(x\right)=x^4+C$ に代入して、

$$4\cdot\frac{16}{3}=16+C\Leftrightarrow C=\frac{16}{3}$$

となる。以上から、

$$f\left(x\right)=x^2+\frac{C}{x^2}=x^2+\frac{16}{3x^2}$$

となる。

$$\text{(答)}\quad f\left(x\right)=x^2+\frac{16}{3x^2}$$

(2)

$$f\left(1\right)=\frac{19}{3},\quad g\left(1\right)=0\text{となることから,}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\rightarrow1+0}\frac{g\left(x\right)-g\left(1\right)}{x-1}&=\lim_{x\rightarrow1+0}\frac{\left|x-1\right|f\left(x\right)}{x-1}=\lim_{x\rightarrow1+0}f\left(x\right)=\frac{19}{3}\\\lim_{x\rightarrow1-0}\frac{g\left(x\right)-g\left(1\right)}{x-1}&=\lim_{x\rightarrow1-0}\frac{\left|x-1\right|f\left(x\right)}{x-1}=\lim_{x\rightarrow1-0}-f\left(x\right)=-\frac{19}{3}\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\lim_{x\rightarrow1+0}\frac{g\left(x\right)-g\left(1\right)}{x-1}\neq\lim_{x\rightarrow1-0}\frac{g\left(x\right)-g\left(1\right)}{x-1}$$

となり、 $g\left(x\right)$ は $x=1$ で微分不可能であることが示された。

(証明終)

(3)

$$f\left(x\right)=x^2+\frac{16}{3x^2}$$

であるから、

$$f'\left(x\right)=2x-\frac{32}{3x^3}=\frac{6x^4-32}{3x^3}$$

となる。よって、 $x>0$ の範囲で $f'\left(x\right)=0$ を満たす x の範囲は $x=2\cdot3^{\frac{1}{4}}$ である。これより、

$y=f\left(x\right)$ の増減表は以下のようになる。

x	$+0$	$\cdots$	$2\cdot3^{\frac{1}{4}}$	$\cdots$
$f'\left(x\right)$		$-$	0	$+$
$f\left(x\right)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

$$\begin{aligned}\lim_{x\rightarrow+0}f\left(x\right)&=+\infty\\\lim_{x\rightarrow+\infty}f\left(x\right)&=+\infty\\f\left(2\cdot3^{\frac{1}{4}}\right)&=\frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{16\sqrt{3}}{3\cdot4}=\frac{8\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

となることから、 $y=f\left(x\right)$ と $y=a$ のグラフの共有点の個数は、

$$a<\frac{8\sqrt{3}}{3}\text{のとき}\qquad 0\text{個}$$

$$a=\frac{8\sqrt{3}}{3}\text{のとき}\qquad 1\text{個}$$

$$a>\frac{8\sqrt{3}}{3}\text{のとき}\qquad 2\text{個}$$

となる。

$$a<\frac{8\sqrt{3}}{3}\text{のとき}\qquad 0\text{個}$$

$$\text{(答)}\qquad a=\frac{8\sqrt{3}}{3}\text{のとき}\qquad 1\text{個}$$

$$a>\frac{8\sqrt{3}}{3}\text{のとき}\qquad 2\text{個}$$

(4)

求める回転体の体積を V とすると、

$$\begin{aligned}V&=\int_1^2\pi\left\{f\left(x\right)\right\}^2dx\\&=\pi\int_1^2\left(x^2+\frac{16}{3x^2}\right)^2dx\\&=\pi\int_1^2\left(x^4+\frac{32}{3}+\frac{256}{9x^4}\right)dx\\&=\pi\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{32}{3}x-\frac{256}{27x^3}\right]_1^2\\&=\pi\left(\frac{31}{5}+\frac{32}{3}+\frac{224}{27}\right)\\&=\frac{3397}{135}\pi\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)}\quad \frac{3397}{135}\pi$$