

(1)

$$\begin{aligned}
 2x^2 - xy - y^2 + 7x - y + 6 &= 2x^2 + (7-y)x - y^2 - y + 6 \\
 &= 2x^2 + (7-y)x - (y-2)(y+3) \\
 &= (2x+y+3)\{x-(y-2)\} \\
 &= (2x+y+3)(x-y+2)
 \end{aligned}$$

である。

(答)  $(2x+y+3)(x-y+2)$ 

(2)

$$\begin{aligned}
 (x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+15 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x-4+3)(x-4-3)(x-4+1)(x-4-1)+15 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \{(x-4)^2-9\}\{(x-4)^2-1\}+15 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x-4)^4-10(x-4)^2+24 &= 0 \\
 \Leftrightarrow \{(x-4)^2-4\}\{(x-4)^2-6\} &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x-4-2)(x-4+2)(x-4-\sqrt{6})(x-4+\sqrt{6}) &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x-6)(x-2)\{x-(4+\sqrt{6})\}\{x-(4-\sqrt{6})\} &= 0 \\
 \Leftrightarrow x=2, 6, 4\pm\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

である。

(答)  $x=2, 6, 4\pm\sqrt{6}$ 

(3)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= g(x) \\
 \Leftrightarrow x+x\log_{10}\alpha+\log_{10}(\alpha+1) &= x+x\log_{10}(\alpha+1)+\log_{10}\alpha \\
 \Leftrightarrow (x-1)\log_{10}\alpha-(x-1)\log_{10}(\alpha+1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x-1)\log_{10}\frac{\alpha}{\alpha+1} &= 0
 \end{aligned}$$

である。ここで、 $\alpha > 0$  のとき  $0 < \frac{\alpha}{\alpha+1} < 1$  であるから、 $\log_{10}\frac{\alpha}{\alpha+1} < 0$  である。これらより、

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 1$$

である。以上より、 $f(x) = 0$  と  $g(x) = 0$  が共通の解をもつならば  $x = 1$  である。ここで、

$$\begin{aligned}
 f(1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow 1+\log_{10}\alpha+\log_{10}(\alpha+1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \log_{10}\{\alpha(\alpha+1)\} &= -1 \\
 \Leftrightarrow \alpha(\alpha+1) &= \frac{1}{10} \\
 \Leftrightarrow 10\alpha^2+10\alpha-1 &= 0 \\
 \therefore \alpha &= \frac{-5+\sqrt{35}}{10} \quad (\because \alpha > 0)
 \end{aligned}$$

である。以上より、 $\alpha = \frac{-5+\sqrt{35}}{10}$  のとき、 $f(x) = 0$  と  $g(x) = 0$  は共通の解  $x = 1$  を持つ。

(答)  $\alpha = \frac{-5+\sqrt{35}}{10}$

(1)

15 個の球をすべて区別して考える。15 個の球が入った袋から 5 個の球を取り出す事象は  ${}_{15}P_5$  (通り) であり、これらは同様に確からしい。問の条件を満たすのは、1, 2, 3, 4 回目のうち丁度 1 回の操作及び 5 回目の操作で赤球を取り出したときであり、このような球の取り出し方は、

$${}_3P_2 \cdot {}_{12}P_3 \cdot {}_4C_1 \text{ (通り)}$$

存在する。以上より、問の条件を満たす確率は、

$$\frac{{}_3P_2 \cdot {}_{12}P_3 \cdot {}_4C_1}{{}_{15}P_5} = \frac{8}{91}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{8}{91}$$

(2)

15 個の球が入った袋から  $n$  個の球を取り出す事象は  ${}_{15}P_n$  (通り) でありこれらは同様に確からしい。問の条件を満たすのは、1, 2,  $\dots$ ,  $n-1$  回目のうち丁度 1 回の操作及び  $n$  回目の操作で赤球を取り出したときであり、このような球の取り出し方は、 $n=1$  のときは 0 通り、 $n=2$  のとき  ${}_3P_2 = 6$  通り、 $n \geq 3$  のとき

$${}_3P_2 \cdot {}_{12}P_{n-2} \cdot {}_{n-1}C_1 \text{ (通り)}$$

存在する。これは  $n=1, 2$  のときも成立する。以上より、問の条件を満たす確率は、

$$\begin{aligned} \frac{{}_3P_2 \cdot {}_{12}P_{n-2} \cdot {}_{n-1}C_1}{{}_{15}P_n} &= \frac{6 \cdot \frac{12!}{(14-n)!} \cdot (n-1)}{\frac{15!}{(15-n)!}} \\ &= \frac{6(n-1)(15-n)}{15 \cdot 14 \cdot 13} \\ &= \frac{(n-1)(15-n)}{455} \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{(n-1)(15-n)}{455}$$

(3)

取り出した 15 個の球を順に並べた列を考える。並べ方の合計は  $15!$  (通り) でありこれらは同様に確からしい。このとき、問の条件を満たす取り出し方は、赤球が 2 個以上隣り合う列と対応する。余事象を考えると、12 個の白球と 3 個の赤球からなる列のうち、赤球が隣り合わない列の数は、12 個の白球の間及び両端の計 13 箇所のうち赤球が存在する 3 箇所を選ぶことを考えれば、

$${}_{13}P_3 \cdot 12! \text{ (通り)}$$

存在する。以上より、問の条件を満たす確率は、

$$\begin{aligned} 1 - \frac{{}_{13}P_3 \cdot 12!}{15!} &= 1 - \frac{22}{35} \\ &= \frac{13}{35} \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{13}{35}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 3x^2 - 6x - 9 \\
 &= 3(x-3)(x+1)
 \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$  の増減表は以下の通りとなる。

|         |            |      |            |     |            |
|---------|------------|------|------------|-----|------------|
| $x$     | $\cdots$   | $-1$ | $\cdots$   | $3$ | $\cdots$   |
| $f'(x)$ | $+$        | $0$  | $-$        | $0$ | $+$        |
| $f(x)$  | $\nearrow$ | 極大   | $\searrow$ | 極小  | $\nearrow$ |

以上より、 $1 \leq x \leq 9$  において、 $f(x)$  は  $x=3$  で最小値

$$f(3)=1$$

を取る。

(答)  $x=3$  のとき最小値1

(2)

三角関数の合成より、

$$g(x) = \sqrt{2} \sin \frac{\pi(x+1)}{4}$$

である。ここで、 $1 \leq x \leq 9$  のとき  $\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi(x+1)}{4} \leq \frac{5\pi}{2}$  であるから、 $g(x)$  は

$\frac{\pi(x+1)}{4} = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow x=1, 9$  のとき最大値  $\sqrt{2}$  を取り、 $\frac{\pi(x+1)}{4} = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow x=5$  のとき最小値  $-\sqrt{2}$  を取る。

(答)  $x=1, 9$  のとき最大値  $\sqrt{2}$   
 $x=5$  のとき最小値  $-\sqrt{2}$

(3)

示すべき不等式の左辺を  $h(n)$  とおく。このとき、 $h(n) = f(n) + g(n)$  である。

[1]  $n \geq 4$  のとき

(1)より、 $f(n) \geq f(4) = 8$  であり、(2)より  $g(n) \geq -\sqrt{2}$  であることから、 $h(n) \geq 1$  である。

[2]  $n=1, 2, 3$  のとき

(1)より、 $f(n) \geq 1$  であり、(2)より  $g(n) \geq 0$  であることから、 $h(n) \geq 1$  である。

以上より、自然数  $n$  に対して、 $h(n) \geq 1$  である。

(証明終)