

(1)

a が素数ではないことを背理法により示す。 a が素数であると仮定する。このとき、

$$a^2 = 3b$$

において、右辺は3を素因数にもつ。一方、 a は素数であるから、左辺の素因数は a のみである。よって素因数分解の一意性より、 $a=3$ である。これは、 a が4以上の自然数であることに反する。以上より、 a は素数ではない。

(証明終)

(2)

c が偶数であることを背理法により示す。 c が奇数であると仮定する。このとき、

$$c^2 + 2d^2 = 4e$$

$$\Leftrightarrow c^2 = 2(2e - d^2)$$

である。ところが、上式の左辺は奇数であり、右辺が偶数であるから、矛盾する。以上より、 c は偶数である。したがって、 c は自然数 k を用いて、 $c=2k$ と表せる。 d が偶数であることを背理法により示す。 d が奇数であると仮定する。このとき、

$$(2k)^2 + 2d^2 = 4e$$

$$\Leftrightarrow d^2 = 2(e - k^2)$$

である。ところが、上式の左辺は奇数であり、右辺が偶数であるから、矛盾する。以上より、 d は偶数である。よって、 c, d はいずれも偶数である。

(証明終)

(3)

$f \equiv g \pmod{m}$ であるから、

$$f - g = ml$$

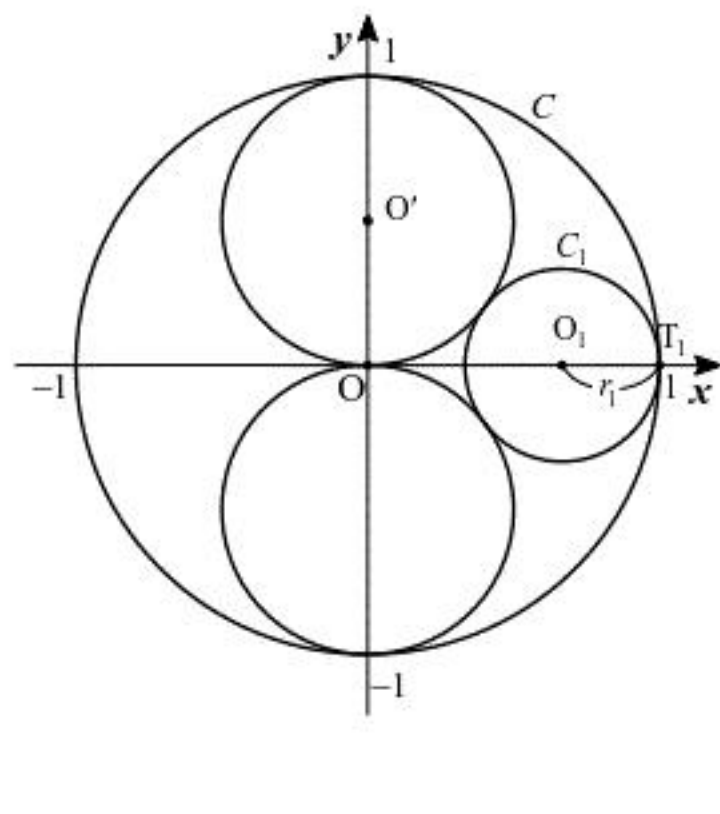
となるような整数 l が存在する。このとき、

$$\begin{aligned} f^k - g^k &= (f - g) \left(\sum_{l=0}^{k-1} f^l g^{k-1-l} \right) \\ &= ml \left(\sum_{l=0}^{k-1} f^l g^{k-1-l} \right) \\ &\equiv 0 \pmod{m} \end{aligned}$$

であるから、 $f^k \equiv g^k \pmod{m}$ である。

(証明終)

(1)



上図のように、 O を原点とし、 O_1 が x 軸の正の部分に存在するように座標平面を設定することが出来る。問題文中で言及されている「 O で外接する直径 1 の 2 つの円」のうち y 座標が正である方の中心を O' とする。このとき、 $\triangle OO_1O'$ に三平方の定理を適用すると、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1-r_1)^2 &= \left(\frac{1}{2}+r_1\right)^2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} + 1 - 2r_1 + r_1^2 &= \frac{1}{4} + r_1 + r_1^2 \\ \Leftrightarrow r_1 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad r_1 = \frac{1}{3}$$

(2)

$r_n > r_{n+1} > 0$ より、 $s_n < s_{n+1}$ である。また、与式より、

$$\begin{aligned} (1+r_n^{-1}+r_{n+1}^{-1})^2 &= 2(5+r_n^{-2}+r_{n+1}^{-2}) \\ \Leftrightarrow (1+s_n+s_{n+1})^2 &= 2(5+s_n^2+s_{n+1}^2) \\ \Leftrightarrow 1+s_n^2+s_{n+1}^2+2s_n+2s_{n+1}+2s_ns_{n+1} &= 2(5+s_n^2+s_{n+1}^2) \\ \Leftrightarrow s_{n+1}^2+s_n^2-2s_ns_{n+1}-2s_n-2s_{n+1}+9 &= 0 \\ \Leftrightarrow s_{n+1}^2-2(s_n+1)s_{n+1}+s_n^2-2s_n+9 &= 0 \\ \Leftrightarrow s_{n+1} &= s_n+1 \pm \sqrt{(s_n+1)^2-s_n^2-2s_n-9} \\ \Leftrightarrow s_{n+1} &= s_n+1 \pm \sqrt{4s_n-8} \end{aligned}$$

$s_n > s_1 = 3$ であることから、 $1-\sqrt{4s_n-8} < 0$ である。よって、

$$s_{n+1} = s_n + 1 + 2\sqrt{s_n-2} \quad (\because s_{n+1} > s_n)$$

となる。(1)より $s_1 = 3$ であるから

$$\begin{aligned} s_2 &= 3+1+2\sqrt{3-2} \\ &= 6 \\ s_3 &= 6+1+2\sqrt{6-2} \\ &= 11 \end{aligned}$$

となる。これらから $\{s_n\}$ の一般項は $s_n = n^2 + 2$ と予想される。数学的帰納法を用いてこれを証明する。

[1] $n=1$ のとき

$$1^2 + 2 = 3 \text{ より、} s_1 = 1^2 + 2 \text{ が成り立つ。}$$

[2] $n=k$ において $s_n = n^2 + 2$ が成り立つとき

$$s_{k+1} = s_k + 1 + 2\sqrt{s_k-2} \text{ であることから、}$$

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= k^2 + 2 + 1 + 2\sqrt{k^2+2-2} \\ &= k^2 + 3 + 2k \\ &= (k+1)^2 + 2 \end{aligned}$$

$$\text{となり、} n=k+1 \text{ においても } s_n = n^2 + 2 \text{ が成り立つ。}$$

以上[1],[2]より、 $\{s_n\}$ の一般項は $s_n = n^2 + 2$ であることが証明された。

$$(\text{答}) \quad s_n = n^2 + 2$$

(3)

(1)で設定した図における点 O_n の x 座標が、 $2nr_n$ になることを示すと題意を得たことになる。

数学的帰納法を用いて証明する。

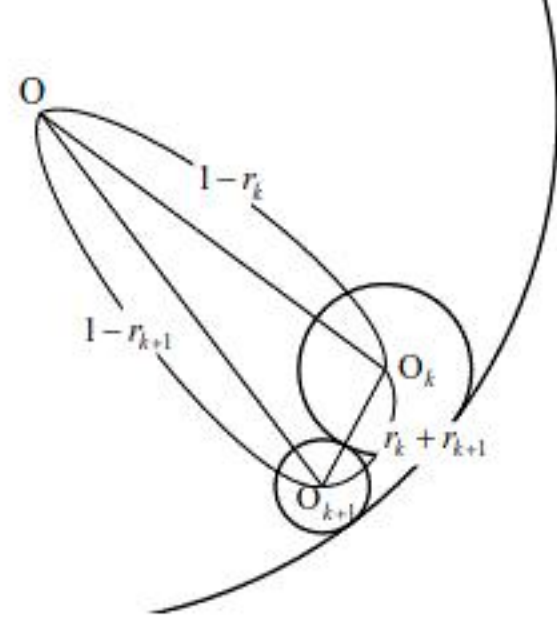
[1] $n=1$ のとき

点 O_1 の x 座標は、

$$\begin{aligned} 1-r_1 &= 1-\frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{である。また、} 2 \cdot 1 \cdot r_1 = \frac{2}{3} \text{ であることから、} n=1 \text{ のとき点 } O_1 \text{ の } x \text{ 座標は } 2nr_n \text{ で表せる。}$$

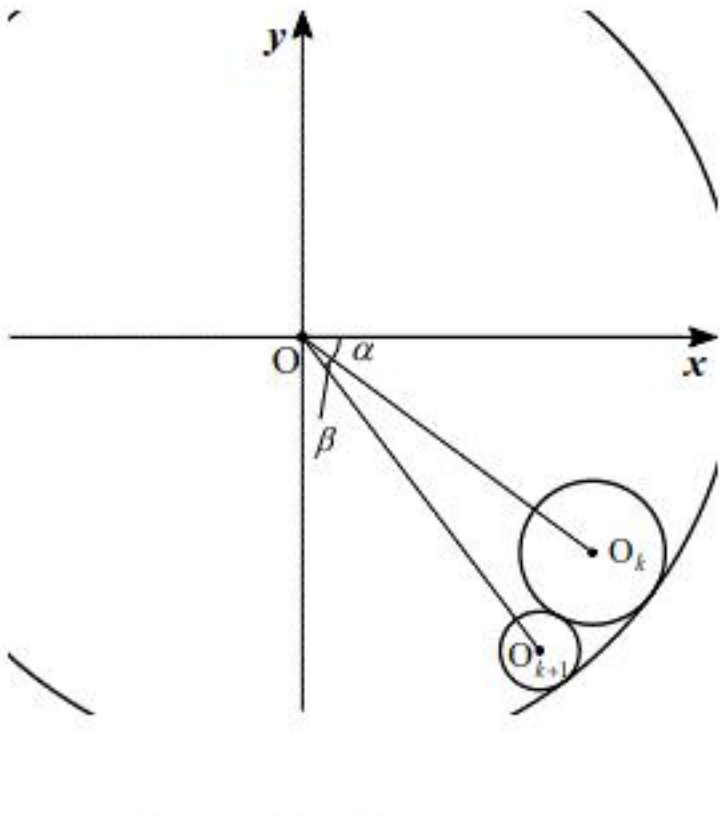
[2] $n=k$ (k は 1 以上の整数)において、点 O_k の x 座標が $2kr_k$ であるとき



(2)より、 $r_k = \frac{1}{k^2+2}$ 、 $r_{k+1} = \frac{1}{k^2+2k+3}$ である。点 O_k は原点 O からの距離が $1-r_k = \frac{k^2+1}{k^2+2}$ である点であり、かつ、点 $T_1, T_2, T_3, \dots$ が時計回りに並んでいることから、点 O_k の座標は、

$$\begin{aligned} \left(2kr_k, -\sqrt{(1-r_k)^2-(2kr_k)^2}\right) &= \left(\frac{2k}{k^2+2}, -\sqrt{\left(\frac{k^2+1}{k^2+2}\right)^2 - \left(\frac{2k}{k^2+2}\right)^2}\right) \\ &= \left(\frac{2k}{k^2+2}, -\frac{k^2-1}{k^2+2}\right) \end{aligned}$$

である。



また、上図のように $\angle O_kOT_1 = \alpha$ 、 $\angle O_{k+1}OO_k = \beta$ とおく。 $\triangle O_kOO_{k+1}$ において余弦定理より、

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{(1-r_k)^2 + (1-r_{k+1})^2 - (r_k+r_{k+1})^2}{2(1-r_k)(1-r_{k+1})} \\ &= \frac{1-r_k-r_{k+1}-r_kr_{k+1}}{(1-r_k)(1-r_{k+1})} \\ &= 1-2 \cdot \frac{\frac{1}{k^2+2} \cdot \frac{1}{k^2+2k+3}}{\frac{k^2+1}{k^2+2} \cdot \frac{k^2+2k+2}{k^2+2} \cdot \frac{k^2+2k+3}{k^2+2}} \\ &= \frac{k^4+2k^3+3k^2+2k}{(k^2+1) \cdot (k^2+2k+2)} \end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \sqrt{1-\cos^2 \beta} \\ &= \sqrt{1-\left\{\frac{k^4+2k^3+3k^2+2k}{(k^2+1)(k^2+2k+2)}\right\}^2} \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{k^4+2k^3+3k^2+2k+1}}{(k^2+1)(k^2+2k+2)} \\ &= 2 \cdot \frac{k^2+k+1}{(k^2+1)(k^2+2k+2)} \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ &= \frac{2k}{k^2+1} \cdot \frac{k^4+2k^3+3k^2+2k}{(k^2+1)(k^2+2k+2)} - \frac{k^2-1}{k^2+1} \cdot \frac{2(k^2+k+1)}{(k^2+1)(k^2+2k+2)} \\ &= \frac{2(k^5+k^4+2k^3+2k^2+k+1)}{(k^2+1)^2(k^2+2k+2)} \\ &= \frac{2(k+1)(k^2+1)^2}{(k^2+1)^2(k^2+2k+2)} \\ &= \frac{2k+2}{k^2+2k+2} \end{aligned}$$

であるから、点 O_{k+1} の x 座標は

$$\begin{aligned} \frac{k^2+2k+2}{k^2+2k+3} \cdot \frac{2k+2}{(k^2+2k+2)} &= \frac{2k+2}{k^2+2k+3} \\ &= 2(k+1)r_{k+1} \end{aligned}$$

である。よって点 O_k の x 座標が $2kr_k$ であるとき、点 O_{k+1} の座標は $2(k+1)r_{k+1}$ である。

以上[1],[2]より、点 O_n と直線 OO_1 に垂直な直線 ℓ の距離は $2nr_n$ である。

(証明終)

(4)

(3)より、点 O_n の x 座標は常に正であり、点 $T_1, T_2, T_3, \dots$ は時計回りに移動することから、点 O_n は常に第 4 象限に存在する。したがって、点 O_n の y 座標は、

$$\begin{aligned} -\sqrt{(1-r_n)^2-(2nr_n)^2} &= -\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2+2}-\left(\frac{2n}{n^2+2}\right)^2} \\ &= -\frac{n^2-1}{n^2+2} \end{aligned}$$

である。点 O_n $\left(\frac{2n}{n^2+2}, -\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)$ と点 $(0, 1)$ 、 $(0, -1)$ との距離はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \left(\frac{2n}{n^2+2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2 &= \frac{9n^4+16n^2}{4(n^2+2)^2} \\ &> \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n^2+2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2n}{n^2+2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^2 &= \frac{16n^2+(n^2-4)^2}{4(n^2+2)^2} \\ &= \left\{\frac{n^2+4}{2(n^2+2)}\right\}^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n^2+2}\right)^2 \end{aligned}$$

である。したがって円 C_n は円 C_1 に外接する直径 1 の円のどちらか一方にだけ外接する。

(証明終)

(1)

点 A, B, C が一直線上に存在すると仮定する。このとき、 $B \neq C$ より、ある実数 k を用いて、 $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$ が成立する。これより、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= k\overrightarrow{BC} \\ \Leftrightarrow (-a, b, 0) &= (0, -bk, ck) \\ \Rightarrow a &= 0\end{aligned}$$

が成立する。ところが、これは $a > 0$ に矛盾する。以上より、A, B, C は一直線上に存在しない。

(証明終)

(2)

問の条件を満たすベクトルを、 $\vec{v} = (s, t, u)$ とおく。このとき、 $\vec{v} \neq \vec{0}$ であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &\perp \vec{v} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} &= 0 \\ \Leftrightarrow -as + tb &= 0 \\ \Leftrightarrow (s, t) &= \left(\frac{k}{a}, \frac{k}{b}\right) (k \text{ は負でない実数})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &\perp \vec{v} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \vec{v} &= 0 \\ \Leftrightarrow -tb + uc &= 0 \\ \Leftrightarrow (t, u) &= \left(\frac{l}{b}, \frac{l}{c}\right) (l \text{ は負でない実数})\end{aligned}$$

である。以上より、

$$\vec{v} = k \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \right)$$

とあらわせる。ここで、

$$\begin{aligned}|\vec{v}| &= 1 \\ \Leftrightarrow k^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) &= 1 \\ \Leftrightarrow k^2 (b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) &= a^2b^2c^2 \quad (\because a, b, c > 0) \\ \Leftrightarrow k^2 &= a^2b^2c^2 \quad (\because b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 = 1) \\ \Leftrightarrow k &= \pm abc\end{aligned}$$

である。以上より、問の条件を満たすベクトルは、

$$\pm(bc, ca, ab)$$

である。

(答) $\pm(bc, ca, ab)$

(3)

平面 α の単位法線ベクトルの1つとして $\vec{v} = (bc, ca, ab)$ が取れるから、原点 O と平面 α の距離は、

$$\begin{aligned}|\vec{v} \cdot \overrightarrow{AO}| &= |-abc| \\ &= abc\end{aligned}$$

である。

(答) abc

(4)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= a^2 > 0 \\ \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &= b^2 > 0 \\ \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} &= c^2 > 0\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\cos \angle BAC &> 0 \\ \cos \angle CBA &> 0 \\ \cos \angle ACB &> 0\end{aligned}$$

が成立する。以上より、 $0^\circ < \angle BAC, \angle CBA, \angle ACB < 90^\circ$ である。

(証明終)

(5)

$\triangle ABC$ の面積を S とおく。立体 OABC の体積を V とおく。立体 OABC について、 $\triangle ABC$ を底面とみなすと、(3)より、

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot abc$$

である。一方、 $\triangle OAB$ を底面とみなすと、

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} ab \right) \cdot c$$

である。以上より、

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \cdot S \cdot abc &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} ab \right) \cdot c \\ \Leftrightarrow S &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。

(答) $S = \frac{1}{2}$

(1)

$f(x)$ の $x=0$ での連続性について調べる。 $f(0)=1$ である。 $1-4x\sin^2 2x$ は連続であるから、

$f(x)$ が $x=0$ で連続であることを示す為には、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin 2x + \cos 2x} = 1$ を示せば良い。ここで、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin 2x + \cos 2x} = \frac{1}{\sin 0 + \cos 0} = 1$$

である。以上より、 $f(x)$ は $x=0$ で連続である。次に $f(x)$ の $x=0$ での微分可能性について

調べる。 $0 < h < \frac{\pi}{4}$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \frac{\frac{1}{\sin 2h + \cos 2h} - 1}{h} \\ &= \frac{1}{\sin 2h + \cos 2h} \cdot \left(\frac{1 - \cos 2h}{h} - \frac{\sin 2h}{h} \right) \\ &= \frac{1}{\sin 2h + \cos 2h} \cdot \left\{ 2 \cdot \frac{\sin 2h}{2h} \cdot \frac{\sin 2h}{(1 + \cos 2h)} - 2 \cdot \frac{\sin 2h}{2h} \right\} \end{aligned}$$

である。これより、

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sin 2h + \cos 2h} \cdot \left\{ 2 \cdot \frac{\sin 2h}{2h} \cdot \frac{\sin 2h}{(1 + \cos 2h)} - 2 \cdot \frac{\sin 2h}{2h} \right\} \right] \\ &= \frac{1}{0+1} \cdot \left\{ 2 \cdot 1 \cdot \frac{0}{1+1} - 2 \cdot 1 \right\} \\ &= -2 \end{aligned}$$

である。一方、 $-\frac{\pi}{2} < h < 0$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \frac{1-4h\sin^2 2h-1}{h} \\ &= -4\sin^2 2h \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} (-4\sin^2 2h) \\ &= -4 \cdot 0^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。以上より、 $\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ であるから、 $f(x)$ は $x=0$ で微分可能ではない。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned} \int (1-4x\sin^2 2x) dx &= \int \{1-2x \cdot (1-\cos 4x)\} dx \\ &= \int (1-2x+2x\cos 4x) dx \\ &= x-x^2+\frac{x}{2}\sin 4x-\int \frac{1}{2}\sin 4x dx \\ &= x-x^2+\frac{x}{2}\sin 4x+\frac{1}{8}\cos 4x+C \end{aligned}$$

である(C は積分定数)。これより、

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx &= \left[x-x^2+\frac{x}{2}\sin 4x+\frac{1}{8}\cos 4x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 \\ &= \frac{1}{8} - \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{8} \right) \\ &= \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2}$

(3)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin 2x + \cos 2x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)}{\sin^2 \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)} dx \end{aligned}$$

である。ここで $t = \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$ とすると、

$$dt = -2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) dx$$

である。したがって

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)}{\sin^2 \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)} dx &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-t^2} dt \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[-\log(1-t) + \log(1+t) \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ -\log \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \log \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \log(\sqrt{2}+1) \end{aligned}$$

である。これと(2)より、

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (1-4x\sin^2 2x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin 2x + \cos 2x} dx \\ &= \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2} \log(\sqrt{2}+1)}{2} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2} \log(\sqrt{2}+1)}{2}$