

平成30年度 前期日程
入学者選抜学力検査問題

環境・情報科学科
数 学

〔注 意〕

- 1 机上に受験票を提示しておくこと。
- 2 監督者の指示があるまで、この問題冊子を開いてはいけない。
- 3 解答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。
- 4 解答用紙に受験番号および氏名を必ず記入すること。
- 5 この冊子の問題は4ページからなっている。
- 6 解答用紙は4枚ある。
- 7 下書き用紙は4枚ある。
- 8 この問題冊子のうち、落丁・乱丁および印刷不鮮明な箇所があれば、手をあげて申し出ること。
- 9 この問題の内容に関する質問には答えない。
- 10 試験開始後60分経過しないと退室できない。退室するときには、解答用紙を机上に置き、問題冊子、下書き用紙は持ち帰ること。

1 以下の問いに答えよ.

- (1) a, b は $a^2 = 3b$ を満たす 4 以上の自然数とする. このとき, a は素数でないことを背理法を用いて証明せよ.
- (2) c, d, e は $c^2 + 2d^2 = 4e$ を満たす自然数とする. このとき, c, d はいずれも偶数であることを証明せよ.
- (3) f, g, m は $f \equiv g \pmod{m}$ を満たす自然数とし, k は自然数とする. このとき, $f^k \equiv g^k \pmod{m}$ であることを証明せよ.

(配点 100 点)

- 2 n を自然数とする. 点 O を中心とする直径 2 の円を C とする. 点 T_1 で C に内接する半径 r_1 の円を C_1 とする. C_n に外接し, 点 T_{n+1} で C に内接する半径 r_{n+1} の円を C_{n+1} と定める. C の円周上に時計回りの順に $T_1, T_2, T_3, \dots$ と並び, $(1 + r_n^{-1} + r_{n+1}^{-1})^2 = 2(5 + r_n^{-2} + r_{n+1}^{-2})$ かつ $r_n > r_{n+1}$ が成り立つとする. C_n の中心を O_n とする. O で外接する直径 1 の 2 つの円に C_1 が外接するとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) r_1 の値を求めよ.
- (2) $s_n = r_n^{-1}$ とする. 数列 $\{s_n\}$ の一般項を求めよ.
- (3) O を通り, 直線 OO_1 に垂直な直線を ℓ とする. O_n と ℓ の距離は $2nr_n$ であることを示せ.
- (4) C に内接し, C_1 に外接する直径 1 の 2 つの円のどちらか一方だけに C_{n+1} は外接することを示せ.

(配点 100 点)

3 $a > 0, b > 0, c > 0, a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = 1$ とする. O を原点とする xyz 空間内に 3 点 $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$ がある. A, B, C が定める平面を α とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) A, B, C は一直線上にないことを示せ.
- (2) α に垂直で大きさ 1 のベクトルを, a, b, c を用いてすべて表せ.
- (3) O と α の距離を a, b, c を用いて表せ.
- (4) $\triangle ABC$ の内角はすべて鋭角であることを示せ.
- (5) $\triangle ABC$ の面積を求めよ.

(配点 100 点)

4 次の関数 $f(x)$ について以下の問いに答えよ.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 4x \sin^2 2x & \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0\right) \\ \frac{1}{\sin 2x + \cos 2x} & \left(0 < x \leq \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

(1) $f(x)$ は $x = 0$ で連続であるが $x = 0$ で微分可能でないことを示せ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ が成り立つことを用いてよい.

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx$ の値を求めよ.

(3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ の値を求めよ.

(配点 100 点)

