

(1)

与式を整理すると、

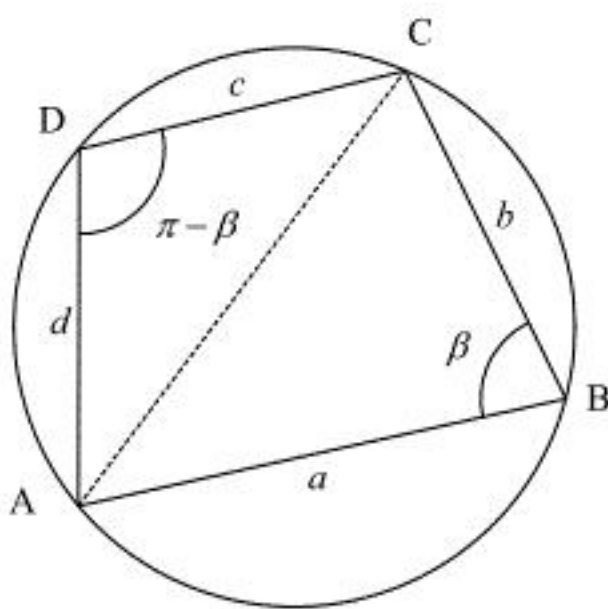
$$\begin{aligned}
 a^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + b^4 - 2b^2c^2 + c^4 &= a^4 - 2(b^2 + c^2)a^2 + (b+c)^2(b-c)^2 \\
 &= \{a^2 - (b+c)^2\} \{a^2 - (b-c)^2\} \\
 &= \{a + (b+c)\} \{a - (b+c)\} \{a + (b-c)\} \{a - (b-c)\} \\
 &= -(a+b+c)(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)
 \end{aligned}$$

と因数分解できる。

$$(\text{答}) -(a+b+c)(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)$$

(2)

四角形 ABCD の図を描くと以下のようになる。



円に内接する四角形の対角の和は π となるので、 $\angle ABC = \beta$ とおくと、 $\angle ADC = \pi - \beta$ である。

ここで、 $\triangle ABC$ に余弦定理を用いると、

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta$$

である。また、 $\triangle ADC$ に余弦定理を用いると、

$$AC^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos(\pi - \beta) = c^2 + d^2 + 2cd \cos \beta$$

であるので、

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta = c^2 + d^2 + 2cd \cos \beta$$

$$\therefore \cos \beta = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$$

である。よって、四角形 ABCD の面積を S とすると、 $S = \triangle ABC + \triangle ADC$ であるので、

$$\begin{aligned}
 S^2 &= \left\{ \frac{1}{2} ab \sin \beta + \frac{1}{2} cd \sin(\pi - \beta) \right\}^2 \\
 &= \left\{ \frac{1}{2} (ab + cd) \sin \beta \right\}^2 \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ (ab + cd)^2 (1 - \cos^2 \beta) \right\} \\
 &= \frac{1}{16} \left\{ 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 \right\} \left(\because \cos \beta = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} \right)
 \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$ を因数分解すると、

$$\begin{aligned}
 &4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 \\
 &= \{2(ab + cd) - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)\} \{2(ab + cd) + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)\} \\
 &= \{(c + d)^2 - (a - b)^2\} \{(a + b)^2 - (c - d)^2\} \\
 &= \{(c + d) + (a - b)\} \{(c + d) - (a - b)\} \{(a + b) + (c - d)\} \{(a + b) - (c - d)\} \\
 &= (-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d)
 \end{aligned}$$

となる。したがって、四角形 ABCD の面積 S は

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{(-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d)}$$

である。

(証明終)

(1)

$a_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{8}(-3)^{n-1} + \frac{1}{8}$ に $n=1, 2$ を代入すると、

$$a_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{8}(-3)^0 + \frac{1}{8} = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{3}{8}(-3)^1 + \frac{1}{8} = 0$$

となる。

(答) $a_1 = 1, a_2 = 0$

(2)

与式を計算すると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k - \frac{(-3)^{n+1}}{32} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(n)(n+1) + \frac{3}{8} \cdot \frac{1-(-3)^n}{1-(-3)} + \frac{n}{8} - \frac{(-3)^{n+1}}{32} \\ &= \frac{1}{4}n(n+1) + \frac{3}{32} + \frac{n}{8} \\ &= \frac{1}{4}n^2 + \frac{3}{8}n + \frac{3}{32} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1}{4}n^2 + \frac{3}{8}n + \frac{3}{32}$

(3)

数学的帰納法を用いて、 $n=1, 2, 3, \dots$ に対して「 a_n が整数である」 $\cdots$ (☆)ということを証明する。

[1] $n=1$ のとき

$a_1 = 1$ であるので(☆)は成立する。

[2] $n=k$ (k は自然数) のとき

$n=k$ (k は自然数) のとき(☆)の成立を仮定すると、 a_k は整数である。ここで、

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \{ (-3)^k - (-3)^{k-1} \} \\ &= \frac{1}{8} \{ 4 - (-3)^{k+1} + (-3)^k \} \end{aligned}$$

であるので、 $S = 4 - (-3)^{k+1} + (-3)^k$ が 8 の倍数であることを示す。以下合同式の法を 8 とする。

[i] $k=2k'+1$ (k' は 0 以上の整数) のとき

$$\begin{aligned} S &= 4 - (-3)^{2k'+2} + (-3)^{2k'+1} \\ &= 4 + (9)^{k'}(-9-3) \\ &\equiv 4 + 1^{k'} \cdot (-4) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるので、 S は 8 の倍数である。

[ii] $k=2k'+2$ (k' は 0 以上の整数) のとき

$$\begin{aligned} S &= 4 - (-3)^{2k'+3} + (-3)^{2k'+2} \\ &= 4 + (9)^{k'+1}(3+1) \\ &\equiv 4 + 1^{k'+1} \cdot 4 \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

となるので、 S は 8 の倍数である

以上[i], [ii]より S は 8 の倍数であることが示された。したがって、 $S=8t$ (t は整数) とおけて

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= \frac{1}{8}S = t \\ \therefore a_{k+1} &= a_k + t \end{aligned}$$

であるので、 a_k は整数であることより a_{k+1} も整数である。つまり、 $n=k+1$ でも(☆)は成立する。

以上[1], [2]より、数学的帰納法により $n=1, 2, 3, \dots$ において(☆)が成立することが示された。

(証明終)

(1)

曲線 $C_1: y = 2x^3 - 3x$ を x 軸方向に a , y 軸方向に $3a$ だけ平行移動した曲線 C_2 の方程式は

$$\begin{aligned} y - 3a &= 2(x - a)^3 - 3(x - a) \\ \Leftrightarrow y &= 2x^3 - 6ax^2 + (6a^2 - 3)x - 2a^3 + 6a \end{aligned}$$

である。ここで、 $y = 2x^3 - 3x$ と $y = 2x^3 - 6ax^2 + (6a^2 - 3)x - 2a^3 + 6a$ を連立して y を消去すると、

$$\begin{aligned} 2x^3 - 3x &= 2x^3 - 6ax^2 + (6a^2 - 3)x - 2a^3 + 6a \\ \Leftrightarrow 6ax^2 - 6a^2x + 2a^3 - 6a &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 3ax + a^2 - 3 &= 0 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

となる。上の式が異なる 2 つの実数解をもつとき、曲線 C_1 と曲線 C_2 が異なる 2 点で交わるので上の式の判別式を D とするとき $D > 0$ であればよい。よって、

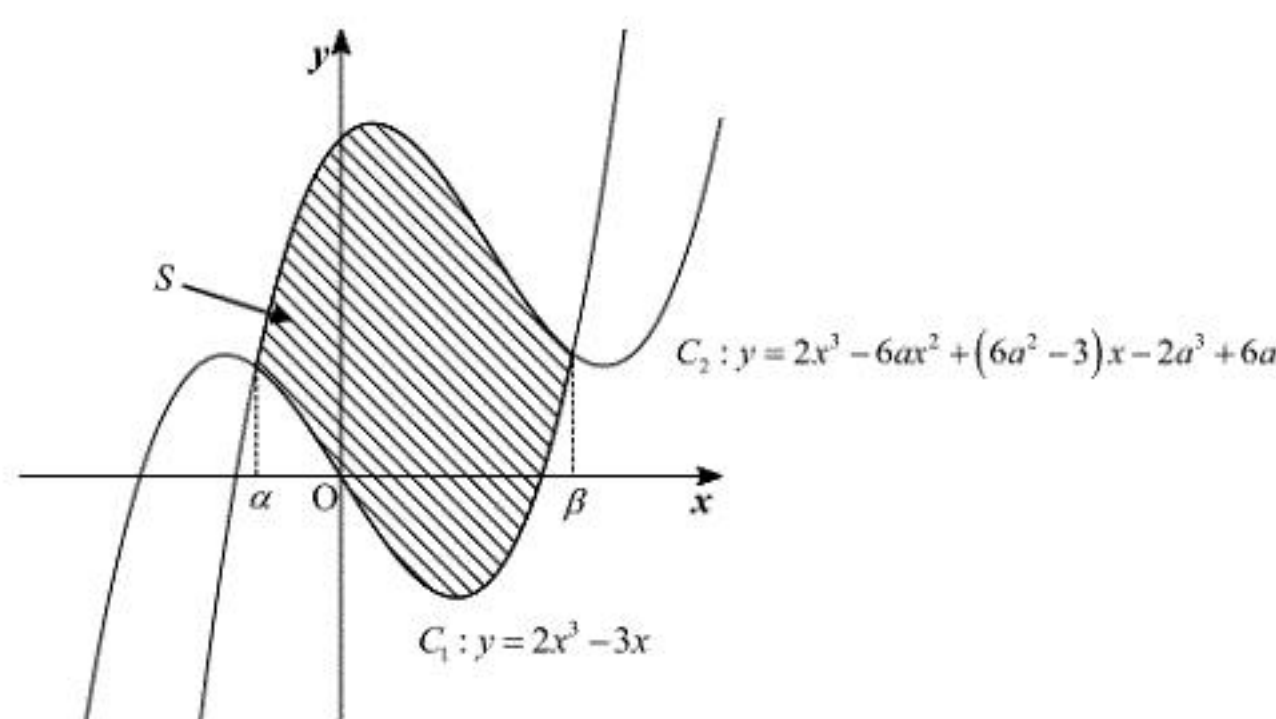
$$\begin{aligned} D > 0 &\Leftrightarrow (3a)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (a^2 - 3) > 0 \\ &\Leftrightarrow -3a^2 + 36 > 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 < 12 \\ &\Leftrightarrow -2\sqrt{3} < a < 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $a > 0$ も考慮して、求める a の範囲は $0 < a < 2\sqrt{3}$ である。

(答) $0 < a < 2\sqrt{3}$

(2)

C_1, C_2 の図を描くと以下のようになる。



ここで、 C_1 と C_2 の交点の x 座標を $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ とすると(1)より、 α, β は

$$3x^2 - 3ax + a^2 - 3 = 0$$

の異なる 2 解となる。よって、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha\beta = \frac{1}{3}(a^2 - 3) \end{cases}$$

が成立する。したがって、上の関係式を使うと

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\left\{ 2x^3 - 6ax^2 + (6a^2 - 3)x - 2a^3 + 6a \right\} - (2x^3 - 3x) \right] dx \\ &= -2a \int_{\alpha}^{\beta} (3x^2 - 3ax + a^2 - 3) dx \\ &= -6a \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= a(\beta - \alpha)^3 \\ &= a(\beta - \alpha)^{2 \cdot \frac{3}{2}} \\ &= a \left\{ (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \right\}^{\frac{3}{2}} \\ &= a \left\{ a^2 - 4 \cdot \frac{1}{3}(a^2 - 3) \right\}^{\frac{3}{2}} \\ &= \left\{ \left(a^{\frac{2}{3}} \right) \left(-\frac{1}{3}a^2 + 4 \right) \right\}^{\frac{3}{2}} \\ &= \left(-\frac{1}{3}a^{\frac{8}{3}} + 4a^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $b = a^{\frac{2}{3}}$ とおくと、 $0 < a < 2\sqrt{3}$ のとき $0 < b < 12^{\frac{1}{3}}$ であり、

$$S = \left(-\frac{1}{3}b^4 + 4b \right)^{\frac{3}{2}}$$

となる。 $f(b) = -\frac{1}{3}b^4 + 4b$ とおくと、

$$\begin{aligned} f'(b) &= -\frac{4}{3}b^3 + 4 \\ &= -\frac{4}{3}(b^3 - 3) \\ &= -\frac{4}{3} \left(b - 3^{\frac{1}{3}} \right) \left(b^2 + 3^{\frac{1}{3}}b + 3^{\frac{2}{3}} \right) \end{aligned}$$

となるので、増減表を書くと以下のようになる。

b	(0)	...	$3^{\frac{1}{3}}$	...	$\left(12^{\frac{1}{3}} \right)$
$f'(b)$		+	0	-	
$f(b)$			極大		

よって、増減表より $f(b)$ の最大値は

$$\begin{aligned} f\left(3^{\frac{1}{3}} \right) &= -\frac{1}{3} \left(3^{\frac{1}{3}} \right)^4 + 4 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(-\frac{1}{3} \cdot 3 + 4 \right) \cdot 3^{\frac{1}{3}} \\ &= 3^{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

である。 $f(b)$ が最大るとき、 S も最大となるので S の最大値は

$$S = \left\{ f\left(3^{\frac{1}{3}} \right) \right\}^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{4 \cdot 3}{2}} = 9$$

である。

(答) 9