

(1)

$$\overrightarrow{AO} = (-a, 0, 0), \quad \overrightarrow{AB} = (-a, b, h), \quad \angle OAB = \frac{\pi}{3} \text{ であるため}$$

$$|\overrightarrow{AO}| = a (\because a > 0) \quad \dots \textcircled{1}$$

及び

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} &= (-a)^2 + 0 \cdot b + 0 \cdot h \\ &= a^2 \end{aligned}$$

が成り立つ。①と $AB=4$ から

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} &= |\overrightarrow{AO}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cos \angle OAB \\ &= a \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 2a \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} a^2 &= 2a \\ \therefore a &= 2 (\because a > 0) \end{aligned}$$

となる。同様に

$$\overrightarrow{BH} = (0, -b, 0), \quad \overrightarrow{BA} = (a, -b, -h)$$

から

$$\begin{cases} \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \cdot a + (-b)^2 + 0 \cdot (-h) \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BA} = |\overrightarrow{BH}| \cdot |\overrightarrow{BA}| \cos \angle ABH = 2b \end{cases}$$

となり

$$\begin{aligned} b^2 &= 2b \\ \therefore b &= 2 (\because b > 0) \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}| &= 4 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + h^2 &= 4^2 \\ \Leftrightarrow h^2 &= 16 - 4 - 4 \\ \therefore h &= 2\sqrt{2} (\because h > 0) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a=2, b=2, h=2\sqrt{2}$$

(2)

 $P(p, 0, 0), Q(0, q, h)$ とおく。このとき

$$\overrightarrow{PO} = (-p, 0, 0), \quad \overrightarrow{PQ} = (-p, q, h), \quad \angle OPQ = \theta$$

であるので

$$\begin{cases} \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PQ} = (-p)^2 + 0 \cdot q + 0 \cdot h = p^2 \\ \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PQ} = |\overrightarrow{PO}| \cdot |\overrightarrow{PQ}| \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot |p| \cdot \sqrt{p^2 + q^2 + h^2} \end{cases}$$

となる。これより

$$p^2 = |p| \cdot \sqrt{\frac{p^2 + q^2 + h^2}{3}}$$

となる。ここで $|p| \neq 0$ より

$$|p| = \sqrt{\frac{p^2 + q^2 + h^2}{3}} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。同様に $\overrightarrow{QH} = (0, -q, 0), \overrightarrow{QP} = (p, -q, -h), \angle HQP = \theta$ であることから

$$\begin{cases} \overrightarrow{QH} \cdot \overrightarrow{QP} = 0 \cdot p + (-q)^2 + 0 \cdot (-h) = q^2 \\ \overrightarrow{QH} \cdot \overrightarrow{QP} = |\overrightarrow{QH}| \cdot |\overrightarrow{QP}| \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot |q| \cdot \sqrt{p^2 + q^2 + h^2} \end{cases}$$

$$\therefore |q| = \sqrt{\frac{p^2 + q^2 + h^2}{3}} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。①, ②より

$$|p| = |q|$$

が成り立つ。よって①より

$$\begin{aligned} |p| &= \sqrt{\frac{2p^2 + h^2}{3}} \\ \Leftrightarrow 3p^2 &= 2p^2 + h^2 \\ \Leftrightarrow p^2 &= h^2 \\ \Leftrightarrow p &= \pm h \\ \therefore p &= \pm 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。よって線分 PQ の長さは $|p| = |q|$ であることから

$$\begin{aligned} \sqrt{p^2 + q^2 + h^2} &= \sqrt{3h^2} \\ &= 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

となる。また線分 AP の長さは点 A より

$$AP = |p - 2| = \begin{cases} 2\sqrt{2} - 2 & (p = 2\sqrt{2} \text{ のとき}) \\ 2\sqrt{2} + 2 & (p = -2\sqrt{2} \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad PQ = 2\sqrt{6}, \quad P(2\sqrt{2}, 0, 0) \text{ のとき } AP = 2\sqrt{2} - 2, \quad P(-2\sqrt{2}, 0, 0) \text{ のとき } AP = 2\sqrt{2} + 2$$

(1)

 C_1 について

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

より, ℓ_1 の方程式は

$$y = \frac{1}{\cos^2 t}(x-t) + \tan t \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。また C_2 について

$$y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

より, ℓ_2 の方程式は

$$y = \frac{\sin t}{\cos^2 t}(x-t) + \frac{1}{\cos t} \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。①, ②から

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 t}(x-t) + \tan t &= \frac{\sin t}{\cos^2 t}(x-t) + \frac{1}{\cos t} \\ \Leftrightarrow \frac{1-\sin t}{\cos^2 t}(x-t) - \frac{1-\sin t}{\cos t} &= 0 \end{aligned}$$

となり, ここで $0 < t < \frac{\pi}{2}$ から $1-\sin t \neq 0$ であることから

$$\begin{aligned} \frac{1-\sin t}{\cos^2 t}(x-t) - \frac{1-\sin t}{\cos t} &= 0 \\ \Leftrightarrow x-t &= \cos t \\ \therefore x &= t + \cos t \end{aligned}$$

となる。よって

$$f(t) = t + \cos t$$

となる。これを②に代入すると

$$y = \frac{1+\sin t}{\cos t}$$

となる。よって

$$g(t) = \frac{1+\sin t}{\cos t}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(t) = t + \cos t, \quad g(t) = \frac{1+\sin t}{\cos t}$$

(2)

$$f'(t) = 1 - \sin t > 0 \left(\because 0 < t < \frac{\pi}{2} \right)$$

より $f(t)$ は単調増加であることが分かる。よって

$$f(t) < f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

となる。

(証明終)

(3)

$$\theta = \frac{\pi}{2} - t \text{ とおくと}$$

$$\cos t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta, \quad \sin t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

となり, ここで

t	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2} - 0$
θ	$\rightarrow$	$+0$

であるので

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \left(\frac{\pi}{2} - t \right) g(t) &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \theta \cdot \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \left(\frac{\theta}{\sin \theta} \right) \cdot (1 + \cos \theta) \\ &= 1 \cdot 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) 2

(1)

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 7\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \left(E - \frac{1}{2}A\right)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 7 \\ 7\sqrt{3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

である。ここで

$$\begin{aligned}E - \frac{1}{2}A &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & 1 + \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \left(E - \frac{1}{2}A\right)^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 7\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 7\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 7\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 6\sqrt{3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。

(答) $a=2, b=6\sqrt{3}$

(2)

問題文から

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}A\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 7\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 7\sqrt{3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

であり、これらの式の差から

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}A\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} - \frac{1}{2}A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ \therefore \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}A\begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{cases} p_n = -\frac{1}{4}p_{n-1} - \frac{\sqrt{3}}{4}q_{n-1} \\ q_n = \frac{\sqrt{3}}{4}p_{n-1} - \frac{1}{4}q_{n-1} \end{cases}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}p_n^2 + q_n^2 &= \left(-\frac{1}{4}p_{n-1} - \frac{\sqrt{3}}{4}q_{n-1}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}p_{n-1} - \frac{1}{4}q_{n-1}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(p_{n-1}^2 + q_{n-1}^2)\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}d_n^2 &= \frac{1}{4}d_{n-1}^2 \\ \Leftrightarrow d_n &= \frac{1}{2}d_{n-1} \left(\because d_n = \sqrt{p_n^2 + q_n^2} > 0 \right) \\ \therefore d_n &= \frac{1}{2^n}d_0\end{aligned}$$

となる。

(答) $d_n = \frac{1}{2^n}d_0$

(1)

$$\begin{aligned}\left\{(x^2+1)^{-n+1}\right\}' &= -2(n-1)x(x^2+1)^{-n} \\ &= -2(n-1)\frac{x}{(x^2+1)^n}\end{aligned}$$

から, $n \neq 1$ のとき

$$\int f_n(x) dx = -\frac{1}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + C$$

となる。一方, $n=1$ のとき

$$\begin{aligned}\int f_n(x) dx &= \int \frac{x}{(x^2+1)} dx \\ &= \frac{1}{2} \log(x^2+1) + C\end{aligned}$$

となる。ただし, ここで C は積分定数とする。

(答) C を積分定数としたとき $n \neq 1$ のとき $-\frac{1}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + C$, $n=1$ のとき $\frac{1}{2} \log(x^2+1) + C$

(2)

$$\begin{aligned}g_n(x) - g_{n+1}(x) &= \int_1^x \{f_n(t) - f_{n+1}(t)\} dt \\ &= \int_1^x \left\{ \frac{t}{(t^2+1)^n} - \frac{t}{(t^2+1)^{n+1}} \right\} \log t dt \\ &= \int_1^x \frac{t^3}{(t^2+1)^{n+1}} \log t dt\end{aligned}$$

となる。よって示された。

(証明終)

(3)

$$\{xf'(x) \log x\}' = f(x) \log x + xf''(x) \log x + f(x)$$

より

$$\begin{aligned}xf'(x) \log x &= \int \{f(x) \log x + xf''(x) \log x + f(x)\} dx \\ \therefore \int \{f(x) + xf''(x)\} \log x &= xf'(x) \log x - \int f(x) dx\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(4)

(2)から

$$\begin{aligned}(1-n)g_n(x) + ng_{n+1}(x) + \frac{1}{2} \int_1^x f_n(t) dt &= g_n(x) - n\{g_n(x) - g_{n+1}(x)\} + \frac{1}{2} \int_1^x f_n(t) dt \\ &= g_n(x) - n \int_1^x \frac{t^3}{(t^2+1)^{n+1}} \log t dt + \frac{1}{2} \int_1^x f_n(t) dt\end{aligned}$$

となる。ここで

$$f'_n(x) = \frac{1}{(x^2+1)^n} - \frac{2nx^2}{(x^2+1)^{n+1}}$$

であることから

$$\begin{aligned}xf'_n(x) &= \frac{x}{(x^2+1)^n} - \frac{2nx^3}{(x^2+1)^{n+1}} \\ \Leftrightarrow xf'_n(x) &= f_n(x) - \frac{2nx^3}{(x^2+1)^{n+1}} \\ \therefore \frac{nx^3}{(x^2+1)^{n+1}} &= -\frac{1}{2} \{xf'_n(x) - f_n(x)\}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}(1-n)g_n(x) + ng_{n+1}(x) + \frac{1}{2} \int_1^x f_n(t) dt &= \int_1^x f_n(t) \log t dt + \frac{1}{2} \int_1^x \{tf'_n(t) - f_n(t)\} \log t dt + \frac{1}{2} \int_1^x f_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_1^x \{f_n(t) + tf'_n(t)\} \log t dt + \frac{1}{2} \int_1^x f_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2} [tf_n(t) \log t]_1^x - \frac{1}{2} \int_1^x f_n(t) dt + \frac{1}{2} \int_1^x f_n(t) dt (\because (3)) \\ &= \frac{x^2 \log x}{2(x^2+1)^n}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{x^2 \log x}{2(x^2+1)^n}$