

平成 20 年度 (前期日程)
入学者選抜学力検査問題

数 学 (120 分)

〔注意事項〕

1. 監督者の指示があるまで、問題冊子（この冊子）を開いてはいけません。
2. 解答用紙には受験番号を記入する欄がそれぞれ 2 箇所ずつあります。監督者の指示に従って、すべての解答用紙（合計 4 枚）の受験番号記入欄（合計 8 箇所）に受験番号を記入しなさい。
3. 解答は、問題番号に対応する解答用紙の指定された場所を書きなさい。解答を解答用紙の裏面に書いてはいけません。
4. 問題は全部で 4 問あり、2 ページにわたって印刷されています。落丁・乱丁および印刷の不鮮明な箇所などがあれば、手をあげて監督者に知らせなさい。
5. 問題冊子の白紙と余白は、計算などに使用してもよろしい。
6. 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
7. 問題冊子と計算用紙は、持ち帰りなさい。

問題 1 2 3 4 のそれぞれに対する配点率は同一である。

1 点 O を原点とする xyz 空間に 3 点 $H(0, 0, h)$, $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, h)$ ($h > 0, a > 0, b > 0$) がある。 $\angle OAB$ と $\angle HBA$ はともに $\frac{\pi}{3}$ に等しく、線分 AB の長さは 4 である。

(1) a, b, h の値を求めよ。

(2) θ を $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ($0 < \theta < \pi$) を満たす実数とする。次の条件を満たす 2 点 P, Q がある。

P は直線 OA 上にあり O と異なる。 Q は直線 HB 上にあり H と異なる。

$\angle OPQ$ と $\angle HQP$ はともに θ に等しい。

このとき、線分 PQ の長さと線分 AP の長さを求めよ。

2 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ とする。曲線 $C_1: y = \tan x$ 上の点 $(t, \tan t)$ における C_1 の接線を ℓ_1 とし、曲線 $C_2: y = \frac{1}{\cos x}$ 上の点 $\left(t, \frac{1}{\cos t}\right)$ における C_2 の接線を ℓ_2 とする。 ℓ_1 と ℓ_2 の交点の座標を $(f(t), g(t))$ とする。

(1) $f(t)$ および $g(t)$ を求めよ。

(2) 不等式 $f(t) < \frac{\pi}{2}$ が成り立つことを示せ。

(3) 極限 $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) g(t)$ を求めよ。

(以下余白)

3 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & -\sin \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$ を考える。

(1) 次の等式を満たす実数 a, b を求めよ。

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{2}A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 7\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

(2) 実数 x_0, y_0 に対して, 数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ を次の漸化式で定義する。

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 7\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) で求めた a, b に対し,

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad d_n = \sqrt{p_n^2 + q_n^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とおくとき, d_n を n と d_0 を用いて表せ。

4 n を自然数とする。 $x > 0$ に対して

$$f_n(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^n}, \quad g_n(x) = \int_1^x f_n(t) \log t \, dt$$

とおく。

(1) 不定積分 $\int f_n(x) \, dx$ を求めよ。

(2) 等式 $\int_1^x \frac{t^3}{(t^2 + 1)^{n+1}} \log t \, dt = g_n(x) - g_{n+1}(x)$ が成り立つことを示せ。

(3) $x > 0$ において微分可能な関数 $f(x)$ について, 等式

$$\int \{f(x) + xf'(x)\} \log x \, dx = xf(x) \log x - \int f(x) \, dx$$

が成り立つことを示せ。

(4) (2), (3) を利用して, $(1 - n)g_n(x) + ng_{n+1}(x) + \frac{1}{2} \int_1^x f_n(t) \, dt$ を求めよ。

(問題終り)

(以下余白)