

$$(1) \quad \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+2t+1 \\ -s-2 \\ s-t-1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AH}$ は α に直交するので,

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$$

が成り立つ。ゆえに,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AH} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s+2t+1 \\ -s-2 \\ s-t-1 \end{pmatrix} \\ &= 3s+t+2=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AH} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s+2t+1 \\ -s-2 \\ s-t-1 \end{pmatrix} \\ &= s+5t+3=0 \end{aligned}$$

よってこれらを連立して,

$$s=t=-\frac{1}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad s=t=-\frac{1}{2}$$

(2) P は α 上の点なので, $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$ が成り立つ。ゆえに,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OP} &= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH}) \cdot \overrightarrow{OP} \\ &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} \end{aligned}$$

ここで,

$$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OH}| |\overrightarrow{OP}| \cos \angle HOP$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OP}| \cos \angle AOP$$

なので,

$$|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OP}| \cos \angle AOP = |\overrightarrow{OH}| |\overrightarrow{OP}| \cos \angle HOP$$

$$\therefore \cos \angle AOP = \frac{|\overrightarrow{OH}|}{|\overrightarrow{OA}|} \cos \angle HOP$$

(証明終)

(3) (2) より $\cos \angle AOP$ が最小となるのは $\cos \angle HOP$ が最小のときである。いま,

$$\overrightarrow{OH} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$$

なので点 H と、点 O に関して対称な点を Q とすると,

$$\overrightarrow{OQ} = -\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$$

$\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ の係数は正で和は1なので、この点 Q は線分 BC 上にある。

また点 H, Q は点 O に関して対称なので、 $\angle HOQ = \pi$ であり、 $\cos \angle HOQ = -1$

よってこの点を P とすれば、 $\cos \angle HOP$ は最小となる。したがって求める最小値は,

$$\frac{|\overrightarrow{OH}|}{|\overrightarrow{OA}|} \cos \pi = -\frac{\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2}}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2}} = -\frac{\sqrt{15}}{6}$$

$$(\text{答}) \quad -\frac{\sqrt{15}}{6}$$

$$(1) \quad f(3)=9a+3b+c=0$$

$f(x)$ は $x=1$ で微分可能なので,

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} (ax^2 + bx + c) = 1^3 - 1^2 + 2 = 2$$

$$a+b+c=2$$

また,

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f'(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} (2ax+b) = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 1$$

$$2a+b=1$$

以上の三式を連立させると,

$$a=-1, b=3, c=0$$

となる。

(答) $a=-1, b=3, c=0$

(2)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + 2 & (x \leq 1) \\ -x^2 + 3x & (x > 1) \end{cases}$$

であり, $x \leq 1$ のときの $f(x)$ について,

$$f'(x) = 3x^2 - 2x = 0$$

$$x=0, \frac{2}{3}$$

よって $x \leq 1$ の範囲で増減表を書くと,

x	...	0	...	$\frac{2}{3}$	...	1
$f'(x)$	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{50}{27}$	$\nearrow$	2

また $x^3 - x^2 + 2 = (x+1)(x^2 - 2x + 2)$ なので, x 軸との交点は $x=-1$

ここで, 接線の式は

$$y = f'(1)(x-1) + 2$$

$$y = x + 1$$

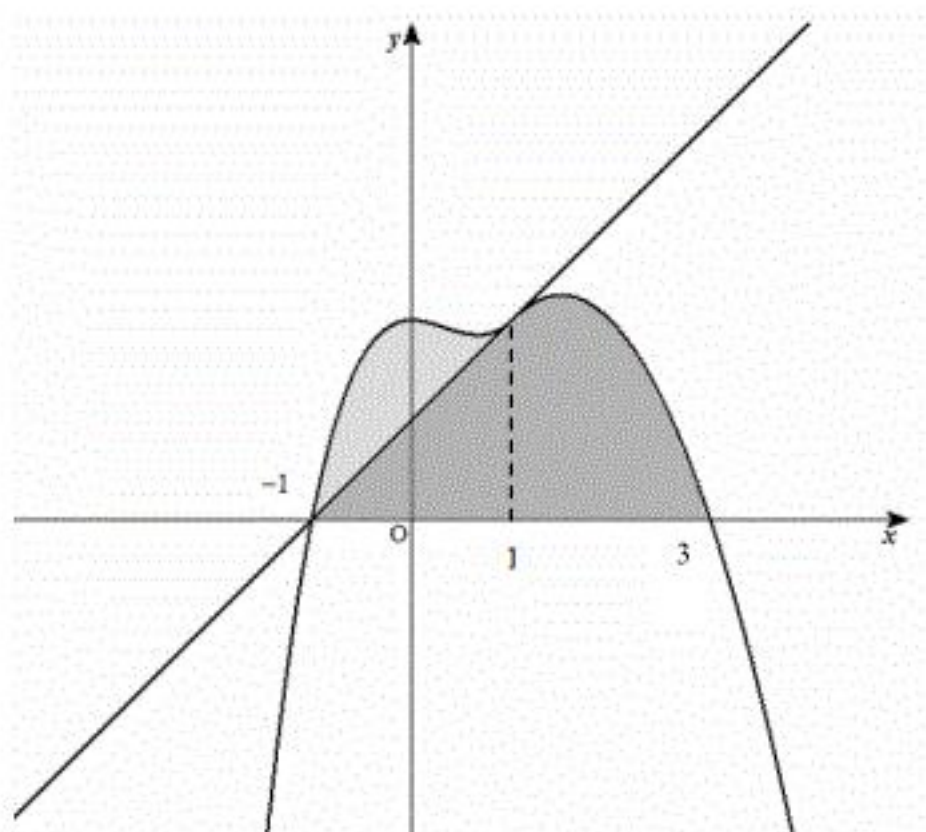
よって

$$x^3 - x^2 + 2 = x + 1$$

$$(x+1)(x-1)^2 = 0$$

より接線と $y=f(x)$ ($x \leq 1$) の交点の x 座標は, $x=-1$

以上から次のようなグラフが描ける。



したがって, 接線の上側の部分の面積は

$$\int_{-1}^1 \{x^3 - x^2 + 2 - (x+1)\} dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}$$

また接線の下側の部分の面積は

$$\int_{-1}^1 (x+1) dx + \int_1^3 (-x^2 + 3x) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-1}^1 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_1^3 = \frac{16}{3}$$

(答) $\frac{4}{3}, \frac{16}{3}$

- (1) $\triangle OAS$ と $\triangle OST$ において余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned}
 AS &= \sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cos \theta} \\
 &= \sqrt{2 - 2 \cos \theta} \\
 &= \sqrt{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \\
 &= 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\because 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \right) \\
 ST &= \sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cos(t - \theta)} \\
 &= \sqrt{2 - 2 \cos(t - \theta)} \\
 &= \sqrt{4 \sin^2 \frac{t - \theta}{2}} \\
 &= 2 \sin \frac{t - \theta}{2} \left(\because 0 < \frac{t - \theta}{2} < \frac{\pi}{2} \right)
 \end{aligned}$$

いま長さの和を K とすると、

$$\begin{aligned}
 K &= 2 \sin \frac{\theta}{2} + 2 \sin \frac{t - \theta}{2} \\
 &= 4 \sin \frac{t}{4} \cos \frac{2\theta - t}{4}
 \end{aligned}$$

よって $0 < \theta < t$ より $-t < 2\theta - t < t$ なので、 K は $\frac{2\theta - t}{4} = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{t}{2}$ で最大値をとり、

その値は

$$K_{\max} = 4 \sin \frac{t}{4}$$

$$(\text{答}) \quad K_{\max} = 4 \sin \frac{t}{4}$$

- (2) (1)と同様にして L を求めると、

$$\begin{aligned}
 L &= 2 \sin \frac{\theta}{2} + 2 \sin \frac{t - \theta}{2} + 2 \sin \frac{s - t}{2} \\
 &= 2 \sin \frac{\theta}{2} + 2 \sin \frac{t - \theta}{2} + 2 \cos \frac{t}{2}
 \end{aligned}$$

(1)の結果より、

$$\begin{aligned}
 L &\leq 4 \sin \frac{t}{4} + 2 \cos \frac{t}{2} \\
 &= 4 \sin \frac{t}{4} + 2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{t}{4} \right) \\
 &= -4 \left(\sin \frac{t}{4} - \frac{1}{2} \right)^2 + 3
 \end{aligned}$$

よって L は $\sin \frac{t}{4} = \frac{1}{2}$ のとき最大値 3 をとるが、 $0 < \frac{t}{4} < \frac{\pi}{4}$ より $\sin \frac{t}{4} = \frac{1}{2}$ を満たす t は

$$\begin{aligned}
 \frac{t}{4} &= \frac{\pi}{6} \\
 \therefore t &= \frac{2}{3} \pi
 \end{aligned}$$

であり、確かに最大値 3 を与える t は存在する。ゆえに $L \leq 3$ (証明終)

さらにこのとき、

$$\theta = \frac{t}{2} = \frac{\pi}{3}$$

である。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{2}{3} \pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

(1) 数学的帰納法による。

(i) $n=0$ のとき

$a_0=b_0=0$ とすると

$$f_0(x)=x^2e^x=(x^2+a_0x+b_0)e^x$$

が成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき

$$f_k(x)=(x^2+a_kx+b_k)e^x$$

を仮定する。

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= f'_k(x) \\ &= \{x^2 + (a_k+2)x + a_k + b_k\}e^x \end{aligned}$$

いま $a_{k+1}=a_k+2$, $b_{k+1}=a_k+b_k$ とおけば,

$$f_{k+1}(x)=(x^2+a_{k+1}x+b_{k+1})e^x$$

となる。よって $n=k+1$ でも成り立つ。

以上より、題が示される。

(証明終)

また, $a_{n+1}=a_n+2$ なので数列 $\{a_n\}$ は公差 2 の等差数列。ゆえに $n \geq 1$ のとき,

$$a_n = a_0 + 2n = 2n$$

$a_0=0$ なので, これは $n=0$ でも成立する。

さらに

$$b_{n+1} = a_n + b_n = b_n + 2n$$

$$b_{n+1} - b_n = 2n$$

より, $n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_0 + \sum_{k=0}^{n-1} 2k \\ &= n^2 - n \end{aligned}$$

$b_0=0$ なので, これは $n=0$ でも成立する。

$$\begin{aligned} (\text{答}) \quad a_n &= 2n \\ b_n &= n^2 - n \end{aligned}$$

$$(2) \quad f_n(x) = \{x^2 + 2nx + n(n-1)\}e^x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \{(x+n)^2 - n\}e^x \leq 0$$

$e^x > 0$ なので, これは

$$-n - \sqrt{n} \leq x \leq -n + \sqrt{n}$$

である。したがって, $x = -n \pm \sqrt{n}$ で $x^2 + 2nx + n(n-1) = 0$ であることに注意して,

$$\begin{aligned} S_n &= - \int_{-n-\sqrt{n}}^{-n+\sqrt{n}} \{x^2 + 2nx + n(n-1)\}e^x dx \\ &= - \left[\{x^2 + 2nx + n(n-1)\}e^x \right]_{-n-\sqrt{n}}^{-n+\sqrt{n}} + \int_{-n-\sqrt{n}}^{-n+\sqrt{n}} (2x+2n)e^x dx \\ &= 0 + \int_{-n-\sqrt{n}}^{-n+\sqrt{n}} (2x+2n)e^x dx \\ &= 2 \left[(x+n)e^x \right]_{-n-\sqrt{n}}^{-n+\sqrt{n}} - 2 \int_{-n-\sqrt{n}}^{-n+\sqrt{n}} e^x dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \left[(x+n-1)e^x \right]_{-n-\sqrt{n}}^{-n+\sqrt{n}} \\ &= 2(\sqrt{n}-1)e^{-n+\sqrt{n}} + 2(\sqrt{n}+1)e^{-n-\sqrt{n}} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad S_n = 2(\sqrt{n}-1)e^{-n+\sqrt{n}} + 2(\sqrt{n}+1)e^{-n-\sqrt{n}}$$