

平成 21 年度 (前期日程)
入学者選抜学力検査問題

数 学 (120 分)

〔注意事項〕

1. 監督者の指示があるまで、問題冊子（この冊子）を開いてはいけません。
2. 解答用紙には受験番号を記入する欄がそれぞれ 2 箇所ずつあります。監督者の指示に従って、すべての解答用紙（合計 4 枚）の受験番号記入欄（合計 8 箇所）に受験番号を記入しなさい。
3. 解答は、問題番号に対応する解答用紙の指定された場所書きなさい。解答を解答用紙の裏面に書いてはいけません。
4. 問題は全部で 4 問あり、2 ページにわたって印刷されています。落丁・乱丁および印刷の不鮮明な箇所などがあれば、手をあげて監督者に知らせなさい。
5. 問題冊子の白紙と余白は、計算などに使用してもよろしい。
6. 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
7. 問題冊子と計算用紙は、持ち帰りなさい。

問題 1 2 3 4 のそれぞれに対する配点率は同一である。

1 点 O を原点とする xyz 空間内の 3 点 $A(-1, 2, 1)$, $B(1, -1, 1)$, $C(2, 0, -1)$ を考える。
3 点 O, B, C を含む平面を α とする。点 H は α 上にあり、直線 AH が α に直交している。

(1) $\overrightarrow{OH} = s\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$ を満たす実数 s, t を求めよ。

(2) 点 P が平面 α 上にあり O と異なるとき、

$$\cos \angle AOP = \frac{|\overrightarrow{OH}|}{|\overrightarrow{OA}|} \cos \angle HOP$$

が成り立つことを示せ。

(3) 点 P が線分 BC 上を動くとき、 $\cos \angle AOP$ の最小値を求めよ。

2 a, b, c は定数とする。関数

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + 2 & (x \leq 1) \\ ax^2 + bx + c & (x > 1) \end{cases}$$

を考える。 $f(x)$ は $x = 1$ において微分可能で、かつ $f(3) = 0$ を満たしている。

(1) a, b, c の値を求めよ。

(2) xy 平面内の曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $(1, 2)$ における C の接線は、 C と x 軸が囲む部分を 2 つの部分に分けている。それら 2 つの部分それぞれの面積を求めよ。

(以下余白)

3 xy 平面内の半円周 $C : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ 上に 2 点 $A(1, 0), B(-1, 0)$ と 2 点 $S(\cos \theta, \sin \theta), T(\cos t, \sin t)$ ($0 < \theta < t < \pi$) がある。

- (1) 弧 AT 上を点 S が動くとき、弦 AS の長さ、弦 ST の長さの和の最大値を t を用いて表せ。
- (2) 3 つの弦 AS, ST, TB の長さの和を L とするとき、不等式 $L \leq 3$ が成り立つことを示せ。また、この不等式において等号が成り立つときの θ と t の値を求めよ。

4 関数 $f_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) は次の条件 (i), (ii) を満たしている。

(i) $f_0(x) = x^2 e^x$

(ii) $f_{n+1}(x) = \frac{d}{dx} f_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$

- (1) $n = 0, 1, 2, \dots$ について、ある定数 a_n, b_n を用いて $f_n(x) = (x^2 + a_n x + b_n)e^x$ と表せることを示し、 a_n, b_n を求めよ。
- (2) $n \geq 1$ とする。 xy 平面内の曲線 $y = f_n(x)$ の $y \leq 0$ の部分を C_n とする。 C_n と x 軸で囲まれる部分の面積 S_n を求めよ。

(問題終了)

(以下余白)