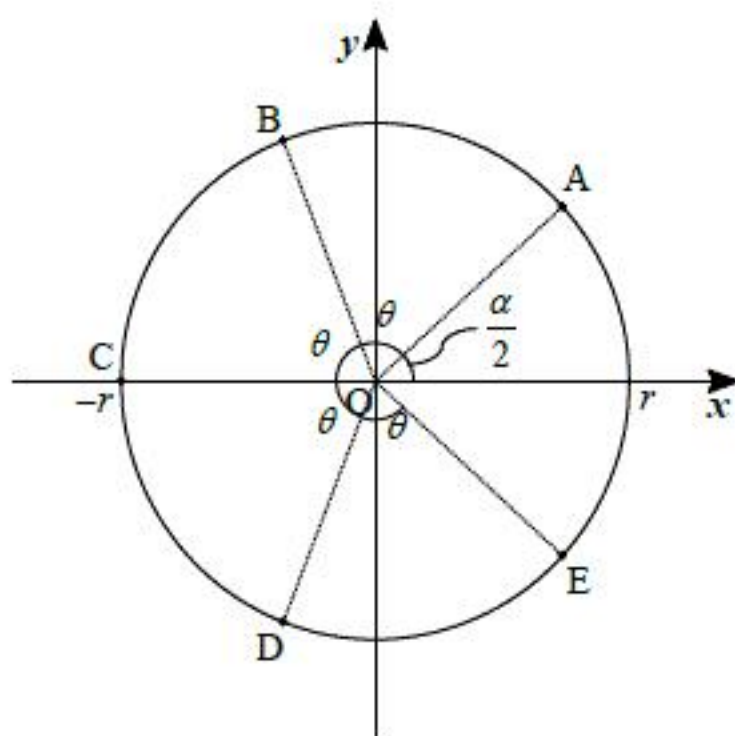


(1)



円の半径を r ($r > 0$) とおく。このとき、上図のように $C(-r, 0)$ と定めても一般性を失わない。
ここで、点 A, B, D, E を上図のように定めると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= (r \cos(\pi - \theta), r \sin(\pi - \theta)) \\ &= (-r \cos \theta, r \sin \theta) \\ \overrightarrow{OD} &= (r \cos(\pi + \theta), r \sin(\pi + \theta)) \\ &= (-r \cos \theta, -r \sin \theta)\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} &= (-2r \cos \theta, 0) \\ &= 2 \cos \theta \cdot (-r, 0) \\ &= 2 \cos \theta \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= 2t\vec{c}\end{aligned}$$

となる。一方、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= \left(r \cos \frac{\alpha}{2}, r \sin \frac{\alpha}{2} \right) \\ \overrightarrow{OE} &= \left(r \cos \left(-\frac{\alpha}{2} \right), r \sin \left(-\frac{\alpha}{2} \right) \right) = \left(r \cos \frac{\alpha}{2}, -r \sin \frac{\alpha}{2} \right)\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE} &= \left(2r \cos \frac{\alpha}{2}, 0 \right) \\ &= -2 \cos \left(\frac{2\pi - 4\theta}{2} \right) \cdot (-r, 0) \\ &= -2 \cos(\pi - 2\theta) \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= 2 \cos 2\theta \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= 2(2 \cos^2 \theta - 1) \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= (4t^2 - 2)\vec{c}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = 2t\vec{c}, \quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE} = (4t^2 - 2)\vec{c}$$

(2)

(1)の答を用いて計算すると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{OC} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE}) \\ &= \vec{c} + 2t\vec{c} + (4t^2 - 2)\vec{c} \\ &= (4t^2 + 2t - 1)\vec{c}\end{aligned}$$

となる。 $\vec{c} \neq \vec{0}$ であるから、これが $\vec{0}$ になるとき、

$$4t^2 + 2t - 1 = 0$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned}\cos 4\theta &= \cos(2\theta + 2\theta) \\ &= \cos 2\theta \cos 2\theta - \sin 2\theta \sin 2\theta \\ &= (2 \cos^2 \theta - 1)^2 - (2 \sin \theta \cos \theta)^2 \\ &= (2t^2 - 1)^2 - 4(1 - t^2)t^2 \\ &= 8t^4 - 8t^2 + 1 \\ &= (2t^2 - t - 1)(4t^2 + 2t - 1) + t \\ &= t \quad (\because 4t^2 + 2t - 1 = 0) \\ &= \cos \theta\end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < 4\theta < 2\pi$ であるから、

$$4\theta = 2\pi - \theta$$

が成り立ち、

$$\alpha = 2\pi - 4\theta = \theta$$

を得る。

(証明終)

(1)

$1, \dots, k-1$ 回目は、白玉 3 個と赤玉 2 個から白玉を取り出すので、1 回毎の確率は $\frac{3}{5}$ 。

k 回目は、白玉 3 個と赤玉 2 個から赤玉を取り出すので、確率は $\frac{2}{5}$ 。

$k+1, \dots, n$ 回目は、白玉 3 個と赤玉 1 個から白玉を取り出すので、1 回毎の確率は $\frac{3}{4}$ 。

よって、 k 回目のみ赤玉を取り出す確率は、

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^k$$

となる。

また、 $X=1$ となる条件は、 n 回の操作のうち 1 回のみ赤玉を取り出すことなので、

$$\begin{aligned} p_n &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^k \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{\frac{4}{5} \left\{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right\}}{1 - \frac{4}{5}} \\ &= \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \left\{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right\} \\ &= \frac{8}{3} \cdot \left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \begin{cases} k \text{ 回目のみ赤玉を取り出す確率: } \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^k \\ p_n = \frac{8}{3} \cdot \left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right\} \end{cases}$$

(2)

$X=0$ となる条件は、 n 回の操作全てで白玉を取り出すことである。

よって、 $X=0$ となる確率は $\left(\frac{3}{5}\right)^n$ である。

X のとり得る値は 0, 1, 2 のみであるから、余事象を考えると、 $X=2$ となる確率は、

$$\begin{aligned} q_n &= 1 - p_n - \left(\frac{3}{5}\right)^n \\ &= 1 - \frac{8}{3} \cdot \left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right\} - \left(\frac{3}{5}\right)^n \\ &= 1 - \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad q_n = 1 - \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

(3)

(1), (2) の答を用いて計算すると、

$$\begin{aligned} E_n &= p_n + 2q_n \\ &= \frac{8}{3} \cdot \left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right\} + 2 \left\{1 - \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n\right\} \\ &= 2 - \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log(2 - E_n) &= \frac{1}{n} \log \left\{ \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n \right\} \\ &= \frac{1}{n} \log \left[\frac{8}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \left\{1 - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n\right\} \right] \\ &= \frac{1}{n} \log \frac{8}{3} + \log \frac{3}{4} + \frac{1}{n} \log \left\{1 - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n\right\} \\ &\rightarrow \log \frac{3}{4} \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad E_n = 2 - \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(2 - E_n) = \log \frac{3}{4}$$

(1)

$$h(t) = AP^2 = \left\{ 2(\cos t - \sin t) - \frac{3}{4} \right\}^2 + \left\{ (\cos t + \sin t) - \frac{3}{2} \right\}^2$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}h(t) &= 2 \left\{ 2(\cos t - \sin t) - \frac{3}{4} \right\} \cdot 2(-\sin t - \cos t) + 2 \left\{ (\cos t + \sin t) - \frac{3}{2} \right\} \cdot (-\sin t + \cos t) \\ &= -8(\cos^2 t - \sin^2 t) + 3(\cos t + \sin t) + 2(\cos^2 t - \sin^2 t) - 3(\cos t - \sin t) \\ &= 6\sin^2 t - 6\cos^2 t + 6\sin t \\ &= 6(2\sin^2 t + \sin t - 1) \\ &= 6(\sin t + 1)(2\sin t - 1) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\frac{d}{dt}h(t) = 0 \Leftrightarrow \sin t = -1, \frac{1}{2}$$

となり、 $0 \leq t \leq 2\pi$ の範囲でこれを満たす t を求めると、

$$t = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$$

(2)

三角関数の合成公式を用いると、

$$\begin{aligned} f(t) &= 2(\cos t - \sin t) = 2\sqrt{2} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \\ g(t) &= \cos t + \sin t = \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

と変形できるので、曲線 C の方程式は

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}} \right)^2 = 1$$

となり、これは確かに楕円を表す。

(証明終)

(3)

$h(t) = AP^2$ なので、 $h(t)$ の増減と AP の増減は一致する。

よって、 $h(t)$ が最小になる時と最大になる時を考えればよい。

$0 \leq t \leq 2\pi$ の範囲における $h(t)$ の増減表は、以下のようになる。

t	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{5\pi}{6}$	...	$\frac{3\pi}{2}$	...	2π
$\frac{d}{dt}h(t)$		-	0	+	0	-	0	-	
$h(t)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	

ここで、 $h(0) = h(2\pi)$ である事に注意すると、

$h(t)$ は $t = \frac{\pi}{6}$ のとき最小、 $t = \frac{5\pi}{6}$ のとき最大になる事が分かる。

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - 1, \quad g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

なので、 AP が最小となる時、 $P\left(\sqrt{3} - 1, \frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right)$ であり、

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - 1, \quad g\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3} + 1}{2}$$

なので、 AP が最大となる時、 $P\left(-\sqrt{3} - 1, \frac{-\sqrt{3} + 1}{2}\right)$ である。

$$(\text{答}) \begin{cases} AP \text{ が最小になるとき} & P\left(\sqrt{3} - 1, \frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right) \\ AP \text{ が最大になるとき} & P\left(-\sqrt{3} - 1, \frac{-\sqrt{3} + 1}{2}\right) \end{cases}$$

(1)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+e^x} dx &= \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx \\ &= x - \log(1+e^x) + C \quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

$$(\text{答}) \int \frac{1}{1+e^x} dx = x - \log(1+e^x) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(2)

$\frac{1}{1+e^x}$ は x について単調減少関数であるから、

$$\frac{1}{1+e^x} - \frac{1}{1+e^a} > 0 \quad (0 \leq x < a \text{ のとき})$$

$$\frac{1}{1+e^x} - \frac{1}{1+e^a} < 0 \quad (a < x \leq 2 \text{ のとき})$$

となる。これと、(1)の答を用いて計算すると

$$\begin{aligned}S(a) &= \int_0^2 \left| \frac{1}{1+e^x} - \frac{1}{1+e^a} \right| dx \\ &= \int_0^a \left(\frac{1}{1+e^x} - \frac{1}{1+e^a} \right) dx - \int_a^2 \left(\frac{1}{1+e^x} - \frac{1}{1+e^a} \right) dx \\ &= \left[x - \log(1+e^x) - \frac{x}{1+e^a} \right]_0^a - \left[x - \log(1+e^x) - \frac{x}{1+e^a} \right]_a^2 \\ &= \frac{2e^a(a-1)}{1+e^a} - 2\log(1+e^a) + \log\{2(1+e^2)\}\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}S'(a) &= 2 \left\{ \frac{ae^a(1+e^a) - e^a(a-1)e^a}{(1+e^a)^2} - \frac{e^a}{1+e^a} \right\} \\ &= \frac{2e^a(a-1)}{(1+e^a)^2}\end{aligned}$$

となる。よって、 $0 \leq a \leq 2$ の範囲における $S(a)$ の増減表は以下のようになる。

a	0	...	1	...	2
$S'(a)$		-	0	+	
$S(a)$		↘		↗	

増減表より、 $S(a)$ は $a=1$ のときに最小となる。よって、求める最小値は、

$$\begin{aligned}S(1) &= -2\log(1+e) + \log\{2(1+e^2)\} \\ &= \log \frac{2(1+e^2)}{(1+e)^2}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \log \frac{2(1+e^2)}{(1+e)^2}$$