

平成 22 年度 (前期日程)
入学者選抜学力検査問題

数 学 (120 分)

(注意事項)

1. 監督者の指示があるまで、問題冊子（この冊子）を開いてはいけません。
2. 解答用紙には受験番号を記入する欄がそれぞれ2箇所ずつあります。監督者の指示に従って、すべての解答用紙（合計4枚）の受験番号記入欄（合計8箇所）に受験番号を記入しなさい。
3. 解答は、問題番号に対応する解答用紙の指定された場所を書きなさい。解答を解答用紙の裏面に書いてはいけません。
4. 問題は全部で4問あり、2ページにわたって印刷されています。落丁・乱丁および印刷の不鮮明な箇所などがあれば、手をあげて監督者に知らせなさい。
5. 問題冊子の白紙と余白は、計算などに使用してもよろしい。
6. 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
7. 問題冊子と計算用紙は、持ち帰りなさい。

問題 1 2 3 4 のそれぞれに対する配点率は同一である。

1 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。点 O を中心とする円周上に反時計回りに並んだ 5 点 A, B, C, D, E があり、 $\angle AOB, \angle BOC, \angle COD, \angle DOE$ はすべて θ に等しい。 $\alpha = 2\pi - 4\theta$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $t = \cos \theta$ とする。

- (1) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ および $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OE}$ を $\vec{c}$ と t を用いて表せ。
(2) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$ が成り立つとき、 α は θ に等しいことを示せ。

2 n は 2 以上の自然数とする。1つの袋と 1つの箱がある。袋には白玉 3 個と赤玉 2 個が入っており、箱には何も入っていない。次の操作を考える。

袋から玉を 1 個取り出し、白玉なら袋に戻し、赤玉なら箱に入れる。

この操作を n 回繰り返す。 n 回目の操作の後、箱に入っている赤玉の個数を X とする。

- (1) k を n 以下の自然数とする。 k 回目の操作では赤玉を取り出し k 回目以外の $n - 1$ 回の操作では白玉を取り出す確率を n と k を用いて表せ。次に、 $X = 1$ である確率 p_n を求めよ。
(2) $X = 2$ である確率 q_n を求めよ。
(3) X の期待値 E_n を求めよ。また、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(2 - E_n)$ を求めよ。

(以下余白)

3 関数 $f(t) = 2(\cos t - \sin t)$, $g(t) = \cos t + \sin t$ を用いて媒介変数表示された, xy 平面上の曲線 $C: x = f(t), y = g(t)$ がある。点 $A\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$ から C 上の点 $P(f(t), g(t))$ までの距離 AP の 2 乗 AP^2 を $h(t)$ とおく。

- (1) $\frac{d}{dt}h(t) = 0$ となる t の値を $0 \leq t \leq 2\pi$ の範囲ですべて求めよ。
- (2) C は楕円であることを示せ。
- (3) P が C 上を動くとき, AP を最小にする P の座標, および AP を最大にする P の座標を求めよ。

4 (1) 不定積分 $\int \frac{1}{1+e^x} dx$ を求めよ。

- (2) 実数 a に対して定積分 $\int_0^2 \left| \frac{1}{1+e^x} - \frac{1}{1+e^a} \right| dx$ の値を $S(a)$ とおく。 a が $0 \leq a \leq 2$ の範囲を動くとき, $S(a)$ の最小値を求めよ。

(問題終了)

(以下余白)