

1

(1)

PB = PC = BC より,

$$(\alpha+1)^2 + (0-1)^2 + (\beta-0)^2 = (\alpha+1)^2 + (0+1)^2 + (\beta-0)^2 = (-1+1)^2 + (1+1)^2 + (0-0)^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha + \beta^2 + 2 = 4$$

である。また, PA = PD = PQ より,

$$(\alpha-1)^2 + (0-1)^2 + (\beta-0)^2 = (\alpha-1)^2 + (0+1)^2 + (\beta-0)^2 = (\alpha+\alpha)^2 + (0-0)^2 + (\beta-\beta)^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + \beta^2 + 2 = 4\alpha^2$$

とわかる。これらを解くと,

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

となり, α は正の実数なので,

$$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

とわかる。また,

$$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \beta^2 + 2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \beta^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

となり, β は正の実数なので,

$$\beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

とわかる。

$$(答) \quad \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

(2)

H の座標を (a, b, c) とおくと,

$$\overline{PH} = (a-\alpha, b, c-\beta)$$

となる。 $\overline{PH} \perp \overline{AB}$ より,

$$\overline{PH} \cdot \overline{AB} = -2(a-\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \alpha$$

である。また, H は直線 AB 上にあるので,

$$\overline{AH} = k \overline{AB}$$

$$\Leftrightarrow (a-1, b-1, c) = k(-2, 0, 0)$$

とわかる。ここで, k はある実数である。よって,

$$b = 1$$

$$c = 0$$

となり, H の座標は $(\alpha, 1, 0)$ である。同様に, K の座標は $(1, 0, 0)$ である。ゆえに,

$$\overline{HP_0} = (0, -1, 0), \quad \overline{P_0P} = (0, 0, \beta), \quad \overline{PH} = (0, 1, -\beta)$$

$$\overline{PP_0} = (0, 0, -\beta), \quad \overline{P_0K} = (1-\alpha, 0, 0), \quad \overline{KP} = (\alpha-1, 0, \beta)$$

であるから,

$$|\overline{HP_0}| = 1, \quad |\overline{P_0P}| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad |\overline{PH}| = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

$$|\overline{PP_0}| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad |\overline{P_0K}| = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad |\overline{KP}| = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

とわかる。したがって,

$$|\overline{PP_0}| : |\overline{P_0K}| : |\overline{KP}| = 1 : \frac{\sqrt{5}-1}{2} : \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

$$= |\overline{HP_0}| : |\overline{P_0P}| : |\overline{PH}|$$

となるので,

$$\triangle HPP_0 \sim \triangle PP_0K$$

と示せた。

証明終

2

(1)

題意より,

$$\begin{aligned}\overline{v} &= \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \\ &= (2t \cos t - (1+t^2) \sin t, 2t \sin t + (1+t^2) \cos t) \\ &= 2t \overline{a} + (1+t^2) \overline{b}\end{aligned}$$

と表せる。

(答) $c = 2t, d = 1+t^2$

(2)

まず,

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\overline{OP} \cdot \overline{v}}{|\overline{OP}| |\overline{v}|} \\ &= \frac{2t(1+t^2)}{(1+t^2) \sqrt{(1+t^2)^2 + 4t^2}} \\ &= \frac{2t}{\sqrt{t^4 + 6t^2 + 1}}\end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned}\tan^2 \theta &= \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 \\ &= \frac{t^4 + 6t^2 + 1}{4t^2} - 1 \\ &= \frac{t^4 + 2t^2 + 1}{4t^2} \\ &= \frac{(t^2 + 1)^2}{4t^2}\end{aligned}$$

とわかる。 $\cos \theta > 0, 0 \leq \theta \leq \pi$ より $\tan \theta > 0$ であるから

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \sqrt{\frac{(t^2 + 1)^2}{4t^2}} \\ &= \frac{t^2 + 1}{2t}\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\tan \theta = \frac{t^2 + 1}{2t}$

(3)

$$f(t) = \frac{t^2 + 1}{2t}$$

とおく。すると,

$$\begin{aligned}f'(t) &= \frac{2t \cdot 2t - 2(t^2 + 1)}{4t^2} \\ &= \frac{t^2 - 1}{2t^2}\end{aligned}$$

となる。よって、増減表は以下のようになる。

t	0	...	1	...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$		$\searrow$	1	$\nearrow$

ゆえに、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ において、 $\tan \theta$ の最小値は 1 であるから、

$$\tan \theta = 1 \text{ のとき, 最小値 } \theta = \frac{\pi}{4}$$

と求まる。

(答) $\theta = \frac{\pi}{4}$

(1)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2} \log x dx &= -\frac{\log x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx \\ &= -\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2} (\log x)^2 dx &= -\frac{(\log x)^2}{x} + \int \frac{2 \log x}{x^2} dx \\ &= -\frac{(\log x)^2}{x} - \frac{2 \log x}{x} - \frac{2}{x} + C\end{aligned}$$

と求まる。(Cは積分定数)

$$(答) \int \frac{1}{x^2} \log x dx = -\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} + C, \int \frac{1}{x^2} (\log x)^2 dx = -\frac{(\log x)^2}{x} - \frac{2 \log x}{x} - \frac{2}{x} + C (C \text{ は積分定数})$$

(2)

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_1^e y^2 dx \\ &= \pi \int_1^e \frac{1}{x^2} (a + \log x)^2 dx \\ &= \pi \left[-\frac{(a + \log x)^2}{x} - \frac{2(a + \log x)}{x} - \frac{2}{x} \right]_1^e \\ &= \pi \left\{ -\frac{(a+1)^2}{e} - \frac{2(a+1)}{e} - \frac{2}{e} + a^2 + 2a + 2 \right\} \\ &= \pi \left(a^2 + 2a + 2 - \frac{a^2 + 4a + 5}{e} \right)\end{aligned}$$

と求まる。このとき、

$$\begin{aligned}V(a) &= \pi \left(a^2 + 2a + 2 - \frac{a^2 + 4a + 5}{e} \right) \\ &= \pi \left(\frac{e-1}{e} a^2 + \frac{2e-4}{e} a + \frac{2e-5}{e} \right) \\ V'(a) &= \pi \left\{ \frac{2(e-1)}{e} a + \frac{2e-4}{e} \right\} \\ &= 2\pi \left(\frac{e-1}{e} a + \frac{e-2}{e} \right)\end{aligned}$$

となる。増減表を書くと以下のようになる。

a	...	$-\frac{e-2}{e-1}$	...
$V'(a)$	-	0	+
$V(a)$	$\searrow$	$V\left(-\frac{e-2}{e-1}\right)$	$\nearrow$

よって、 $V(a)$ は、 $a = -\frac{e-2}{e-1}$ のとき最小値をとる。

$$(答) V = \pi \left(\frac{e-1}{e} a^2 + \frac{2e-4}{e} a + \frac{2e-5}{e} \right), a = -\frac{e-2}{e-1} \text{ のときに最小値}$$

4

(1)

$p=1$ のとき,

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}$$

$p=3$ のとき,

$$\frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \dots, \frac{3}{2^n}$$

$p=7$ のとき,

$$\frac{7}{8}, \dots, \frac{7}{2^n}$$

となる。よって,

$$a_1 = \frac{7}{8}, \quad a_2 = \frac{3}{4}, \quad a_3 = \frac{1}{2}, \quad a_4 = \frac{7}{16}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad a_1 = \frac{7}{8}, \quad a_2 = \frac{3}{4}, \quad a_3 = \frac{1}{2}, \quad a_4 = \frac{7}{16}$$

(2)

k を自然数とすると,

$$\frac{7}{2^{k+2}} > \frac{3}{2^{k+1}} > \frac{1}{2^k} > \frac{7}{2^{k+3}} > \frac{3}{2^{k+2}} > \frac{1}{2^{k+1}} > \dots$$

となるので,

$$a_{3k-2} = \frac{7}{2^{k+2}}, \quad a_{3k-1} = \frac{3}{2^{k+1}}, \quad a_{3k} = \frac{1}{2^k}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad a_{3k-2} = \frac{7}{2^{k+2}}, \quad a_{3k-1} = \frac{3}{2^{k+1}}, \quad k \text{ は自然数 } a_{3k} = \frac{1}{2^k}$$

(3)

$$\begin{aligned} T_N &= \sum_{k=1}^N \left(\frac{7}{2^{k+2}} + \frac{3}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^k} \right) \\ &= \frac{17}{4} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^N} \right)}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{17}{4} \left(1 - \frac{1}{2^N} \right) \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} T_N &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{17}{4} \left(1 - \frac{1}{2^N} \right) \right\} \\ &= \frac{17}{4} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad T_N = \frac{17}{4} \left(1 - \frac{1}{2^N} \right), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} T_N = \frac{17}{4}$$