

平成 23 年度 (前期日程)
入学者選抜学力検査問題

数 学 (120 分)

(注意事項)

1. 監督者の指示があるまで、問題冊子（この冊子）を開いてはいけません。
2. 解答用紙には受験番号を記入する欄がそれぞれ2箇所ずつあります。監督者の指示に従って、すべての解答用紙（合計4枚）の受験番号記入欄（合計8箇所）に受験番号を記入しなさい。
3. 解答は、問題番号に対応する解答用紙の指定された場所を書きなさい。解答を解答用紙の裏面に書いてはいけません。
4. 問題は全部で4問あり、2ページにわたって印刷されています。落丁・乱丁および印刷の不鮮明な箇所などがあれば、手をあげて監督者に知らせなさい。
5. 問題冊子の白紙と余白は、計算などに使用してもよろしい。
6. 解答用紙は、持ち帰ってはいけません。
7. 問題冊子と計算用紙は、持ち帰りなさい。

問題 1 2 3 4 のそれぞれに対する配点率は同一である。

1 xyz 空間に 6 点

$$A(1, 1, 0), B(-1, 1, 0), C(-1, -1, 0), D(1, -1, 0), P(\alpha, 0, \beta), Q(-\alpha, 0, \beta)$$

が与えられている。ただし、 α, β は正の実数とする。

$$PB = PC = BC \quad \text{かつ} \quad PA = PD = PQ$$

であるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) α, β を求めよ。
- (2) 点 $P_0(\alpha, 0, 0)$ を考える。P から直線 AB に下ろした垂線と直線 AB との交点を H とし、P から直線 AD に下ろした垂線と直線 AD との交点を K とする。このとき、2 つの三角形 $\triangle HP_0P$ と $\triangle PP_0K$ が相似であることを示せ。

2 O を原点とする xy 平面上を動く点 P の時刻 t における座標 (x, y) が

$$x = (1 + t^2) \cos t, \quad y = (1 + t^2) \sin t$$

で与えられている。時刻 t における P の速度を $\vec{v}$ とし、2 つのベクトル $\overrightarrow{OP}, \vec{v}$ のなす角を θ とする。ただし、 $0 \leq \theta \leq \pi$ である。

- (1) 時刻 t において、ベクトル $\vec{a} = (\cos t, \sin t), \vec{b} = (-\sin t, \cos t)$ と実数 c, d が $\vec{v} = c\vec{a} + d\vec{b}$ を満たすとき、 c, d を t を用いて表せ。
- (2) $t > 0$ のとき、 $\tan \theta$ を t を用いて表せ。
- (3) $t > 0$ における θ の最小値を求めよ。

(以下余白)

3

(1) 不定積分 $\int \frac{1}{x^2} \log x \, dx$ および $\int \frac{1}{x^2} (\log x)^2 \, dx$ を求めよ。

(2) 実数 a に対して、曲線 $y = \frac{1}{x}(a + \log x)$ ($1 \leq x \leq e$) と x 軸および 2 直線 $x = 1$, $x = e$ で囲まれた部分を、 x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V とする。
 V を a を用いて表せ。また、 a が実数全体を動くとき、 V を最小とする a の値を求めよ。

4

有理数 r について、次の 2 つの条件を考える。

- (i) $1, 3, 7$ のいずれかの数 p と自然数 m を用いて $r = \frac{p}{2^m}$ と表される。
- (ii) $r < 1$

条件 (i), (ii) をともに満たすような有理数 r の全体を大きい方から順に並べてできる数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ を考える。

- (1) a_1, a_2, a_3, a_4 を求めよ。
- (2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) N を自然数とする。数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $3N$ 項までの和 T_N を N を用いて表せ。
 さらに、極限 $\lim_{N \rightarrow \infty} T_N$ を求めよ。

(問題終了)

(以下余白)