$\boxed{1}$

(1)

C_1 と C_2 の交点の x 座標が α であることから,

$$k\cos\alpha = \frac{1}{k}\sin\alpha$$
$$\Leftrightarrow \sin\alpha = k^2\cos\alpha$$

が成り立つ。これを $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ に代入すると,

$$\left(k^4+1\right)\cos^2\alpha = 1$$
$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{k^4+1}$$

となり, $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ より, $\cos\alpha \geqq 0$ であるから,

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{k^4+1}}$$

である。したがって,

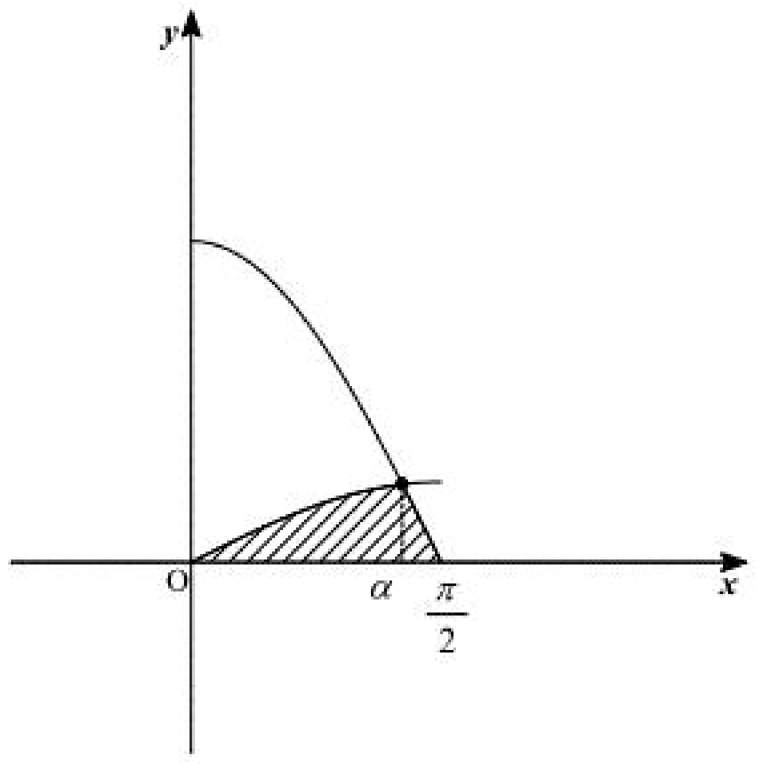
$$\sin\alpha = \frac{k^2}{\sqrt{k^4+1}}$$

である。

(答) $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{k^4+1}}, \sin\alpha = \frac{k^2}{\sqrt{k^4+1}}$

(2)

C_1 と C_2 と x 軸に囲まれた図形は, 下図の斜線部である。



したがって, 求める面積は,

$$S(k) = \int_0^{\alpha}\frac{1}{k}\sin x dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} k\cos x dx$$
$$= \frac{1}{k}\left[-\cos x\right]_0^{\alpha} + k\left[\sin x\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{k}\left(1-\cos\alpha\right) + k\left(1-\sin\alpha\right)$$

となる。ここで, (1)の答を代入すると,

$$S(k) = k + \frac{1}{k} - \sqrt{k^2 + \frac{1}{k^2}}$$

と表せる。

(答) $S(k) = k + \frac{1}{k} - \sqrt{k^2 + \frac{1}{k^2}}$

(3)

$S(k)$ は

$$S(k) = k + \frac{1}{k} - \sqrt{\left(k+\frac{1}{k}\right)^2 - 2}$$

と書き換えることができる。ここで, $l = k + \frac{1}{k}$ とおくと, l のとりうる範囲は, $k > 0$ より相加平均と相乗平均の関係から,

$$k + \frac{1}{k} \geqq 2\sqrt{k\cdot\frac{1}{k}} = 2$$ (ただし等号が成立するのは, $k=1$ のときである。)

であることより,

$$l \geqq 2$$

である。また, このとき $S(k)$ は,

$$S(k) = l - \sqrt{l^2-2}$$

とかける。右辺を $f(l)$ とおく。$f(l)$ を l で微分すると,

$$f'(l) = 1 - \frac{l}{\sqrt{l^2-2}}$$

となり, $l \geqq 2$ のとき, 常に $l > \sqrt{l^2-2}$ であるから,

$$f'(l) < 0$$

である。よって $f(l)$ は $l \geqq 2$ において単調減少する関数であり, その最大値をとるのは $l = 2$ のとき, すなわち $k = 1$ のときであり, その値は $2-\sqrt{2}$ である。

(答) 最大値 $2-\sqrt{2}$

$\boxed{2}$

(1)

$\triangle$PABの面積S_1は

$$S_1=\frac{1}{2}\times \mathrm{AB}\times \mathrm{PK}_1$$

とかける。また，$\triangle$HABの面積Sは

$$S=\frac{1}{2}\times \mathrm{AB}\times \mathrm{HK}_1$$

とかける。ここで，

$$\cos\alpha_1=\frac{\mathrm{HK}_1}{\mathrm{PK}_1}$$

であるから，

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\times \mathrm{AB}\times \mathrm{PK}_1\cos\alpha_1\\&=S_1\cos\alpha_1\end{aligned}$$

である。

(答)　$S_1\cos\alpha_1$

(2)

(1)と同様にして，$\triangle$HBCの面積は，$S_2\cos\alpha_2$，$\triangle$HCAの面積は，$S_3\cos\alpha_3$である。よって，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\triangle\mathrm{HAB}+\triangle\mathrm{HBC}+\triangle\mathrm{HCA}\\&=S_1\cos\alpha_1+S_2\cos\alpha_2+S_3\cos\alpha_3\end{aligned}$$

である。

また，$\overrightarrow{l_1}$は平面PABに垂直であるから，$\overrightarrow{l_1}$とz軸のなす角はα_1である。したがって，

$$(\overrightarrow{l_1}\text{の}z\text{成分})=\left|\overrightarrow{l_1}\right|\cos\alpha_1=S_1\cos\alpha_1$$

であり，同様にして，$\overrightarrow{l_2}$のz成分は，$S_2\cos\alpha_2$，$\overrightarrow{l_3}$のz成分は，$S_3\cos\alpha_3$であるから，

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{l_1}+\overrightarrow{l_2}+\overrightarrow{l_3}\text{の}z\text{成分})&=(\overrightarrow{l_1}\text{の}z\text{成分})+(\overrightarrow{l_2}\text{の}z\text{成分})+(\overrightarrow{l_3}\text{の}z\text{成分})\\&=S_1\cos\alpha_1+S_2\cos\alpha_2+S_3\cos\alpha_3\end{aligned}$$

である。以上より，

$$(\overrightarrow{l_1}+\overrightarrow{l_2}+\overrightarrow{l_3}\text{の}z\text{成分})=\triangle\mathrm{ABC}$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)

まず，

$$S_1=\frac{1}{2}\times \mathrm{AB}\times \mathrm{PK}_1$$

$$S_2=\frac{1}{2}\times \mathrm{BC}\times \mathrm{PK}_2$$

$$S_3=\frac{1}{2}\times \mathrm{CA}\times \mathrm{PK}_3$$

とかける。ここで，

$$\mathrm{PH}=\mathrm{PK}_1\sin\alpha_1=\mathrm{PK}_2\sin\alpha_2=\mathrm{PK}_3\sin\alpha_3$$

であるから，これを代入すると，

$$\mathrm{AB}=\frac{2}{\mathrm{PH}}\times S_1\sin\alpha_1$$

$$\mathrm{BC}=\frac{2}{\mathrm{PH}}\times S_2\sin\alpha_2$$

$$\mathrm{CA}=\frac{2}{\mathrm{PH}}\times S_3\sin\alpha_3$$

である。よって，

$$\mathrm{AB}:\mathrm{BC}:\mathrm{CA}=S_1\sin\alpha_1:S_2\sin\alpha_2:S_3\sin\alpha_3$$

である。

(答)　$\mathrm{AB}:\mathrm{BC}:\mathrm{CA}=S_1\sin\alpha_1:S_2\sin\alpha_2:S_3\sin\alpha_3$

$\boxed{3}$

まず，与式を書き換えて，

$$\int_1^e \log(ax)\,dx = \int_1^e x\,dx \cdot \int_1^e \frac{\log(ax)}{x}\,dx$$

である。これを計算すると，

$$\Leftrightarrow \left[x\log(ax)-x\right]_1^e = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e\left[\frac{1}{2}\{\log(ax)\}^2\right]_1^e$$

$$\Leftrightarrow (e-1)\log a+1=\frac{1}{2}(e^2-1)\left(\frac{1}{2}+\log a\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(e-1)^2\log a=-\frac{1}{4}(e^2-5)$$

$$\Leftrightarrow \log a=-\frac{e^2-5}{2(e-1)^2}$$

である。

（答） $\log a=-\dfrac{e^2-5}{2(e-1)^2}$

4

(i)に$n=1, 2$を代入すると,

$$a_1=1+\frac{1}{1}=2$$

$$a_2=p=r+\frac{1}{r} \qquad \cdot\cdot\cdot ①$$

$$\Leftrightarrow r^2-pr+1=0 \qquad \cdot\cdot\cdot ②$$

となる。

(1)

(i), ①を用いて計算すると,

$$\begin{aligned} pa_{n+1}-a_n &= \left(r+\frac{1}{r}\right)\left(r^n+\frac{1}{r^n}\right)-\left(r^{n-1}+\frac{1}{r^{n-1}}\right) \\ &= r^{n+1}+\frac{1}{r^{n+1}} \\ &= a_{n+2} \end{aligned}$$

となる。よって，すべての自然数nについて，$a_{n+2}=pa_{n+1}-a_n$が成り立つ。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned} a_3 &= pa_2-a_1 \\ &= p^2-2 \end{aligned}$$

である。(iii)の条件から

$$p^2-2 \leqq 13$$

である。$p>0$であるから,

$$0<p\leqq\sqrt{15}$$

である。pは自然数であるから,

$$p=1, 2, 3$$

である。それぞれについて，②に代入して考える。

[1] $p=1$のとき

$r^2-r+1=0$であるが，これは実数解を持たないので不適である。

[2] $p=2$のとき

$$r^2-2r+1=0$$
$$\Leftrightarrow (r-1)^2=0$$
$$\Leftrightarrow r=1$$

であるが，$r>1$であるので，不適である。

[3] $p=3$のとき

$$r^2-3r+1=0$$
$$\Leftrightarrow r=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

である。$r>1$であるので，$r=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$である。

以上, [1], [2], [3]より，$p=3, r=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$である。

(答) $p=3, r=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

(3)

(2)より，$a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n$であるから,

a_nが3の倍数である$\Leftrightarrow$ a_{n+2}が3の倍数である

が成り立つ。また，$a_1=2$は3の倍数ではなく，$a_2=3$は3の倍数であるから，nが偶数のとき，かつそのときに限り，a_nは3の倍数になる。したがって求める答えは,

$$\sum_{k=1}^{m}a_{2k} \qquad \cdot\cdot\cdot ③$$

である。

ここで，a_nの一般項を求める。$a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n$の特性方程式$x^2=3x-1$を解くと，$x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$である。だから,

$$\begin{aligned} a_{n+1}-\frac{3+\sqrt{5}}{2}a_n &= \frac{3-\sqrt{5}}{2}\left(a_n-\frac{3+\sqrt{5}}{2}a_{n-1}\right) \\ &= \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(a_2-\frac{3+\sqrt{5}}{2}a_1\right) \\ &= -\sqrt{5}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1}-\frac{3-\sqrt{5}}{2}a_n &= \frac{3+\sqrt{5}}{2}\left(a_n-\frac{3-\sqrt{5}}{2}a_{n-1}\right) \\ &= \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(a_2-\frac{3-\sqrt{5}}{2}a_1\right) \\ &= \sqrt{5}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

となる。これをa_{n+1}を消去してa_nについて解くと,

$$a_n=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

である。したがって，これを③に代入し,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{m}\left\{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2k-1}+\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2k-1}\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{m}\left\{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}+\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right\} \\ &= \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\frac{\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^m-1}{\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)-1}+\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\frac{\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^m-1}{\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^m-\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^m\right\} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^m-\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^m\right\}$