平成 24 年度 (前期日程)
入学者選抜学力検査問題

数　　学 (120 分)

〔注意事項〕

1. 監督者の指示があるまで，問題冊子（この冊子）を開いてはいけません。
2. **解答用紙には受験番号を記入する欄がそれぞれ２箇所ずつあります。監督者の指示に従って，すべての解答用紙（合計４枚）の受験番号記入欄（合計８箇所）に受験番号を記入しなさい。**
3. **解答は，問題番号に対応する解答用紙の指定された場所に書きなさい。解答を解答用紙の裏面に書いてはいけません。**
4. 問題は全部で４問あり，２ページにわたって印刷されています。落丁・乱丁および印刷の不鮮明な箇所などがあれば，手をあげて監督者に知らせなさい。
5. 問題冊子の白紙と余白は，計算などに使用してもよろしい。
6. **解答用紙は，持ち帰ってはいけません。**
7. 問題冊子と計算用紙は，持ち帰りなさい。

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ のそれぞれに対する配点率は同一である。

$\boxed{1}$ k は正の実数とする。xy 平面において，x 軸および２つの曲線

$$C_1 : y = k\cos x \quad \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right), \quad C_2 : y = \frac{1}{k}\sin x \quad \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

で囲まれた図形の面積を $S(k)$ とする。

(1) C_1 と C_2 の交点の x 座標を α とするとき，$\cos\alpha$ および $\sin\alpha$ を k を用いて表せ。

(2) $S(k)$ を k を用いて表せ。

(3) k が $k > 0$ の範囲を動くときの $S(k)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{2}$ xyz 空間内に四面体 PABC がある。△ABC は xy 平面内にある鋭角三角形とし，頂点 P の z 座標は正とする。P から xy 平面に下ろした垂線を PH とし，H は △ABC の内部にあるとする。H から直線 AB, BC, CA に下ろした垂線をそれぞれ $\mathrm{HK_1}$, $\mathrm{HK_2}$, $\mathrm{HK_3}$ とする。そのとき $\mathrm{PK_1} \perp \mathrm{AB}$, $\mathrm{PK_2} \perp \mathrm{BC}$, $\mathrm{PK_3} \perp \mathrm{CA}$ である。$\angle\mathrm{PK_1H} = \alpha_1$, $\angle\mathrm{PK_2H} = \alpha_2$, $\angle\mathrm{PK_3H} = \alpha_3$ とし，△PAB, △PBC, △PCA の面積をそれぞれ S_1, S_2, S_3 とする。

(1) △HAB の面積を α_1, S_1 を用いて表せ。

(2) 3つのベクトル $\overrightarrow{\ell_1}$, $\overrightarrow{\ell_2}$, $\overrightarrow{\ell_3}$ は，大きさがそれぞれ S_1, S_2, S_3 であり，向きがそれぞれ平面 PAB, 平面 PBC, 平面 PCA に垂直であるとする。ただし，$\overrightarrow{\ell_1}$, $\overrightarrow{\ell_2}$, $\overrightarrow{\ell_3}$ の z 成分はすべて正とする。このとき，$\overrightarrow{\ell_1} + \overrightarrow{\ell_2} + \overrightarrow{\ell_3}$ の z 成分は △ABC の面積に等しいことを示せ。

(3) 3辺 AB, BC, CA の長さの比 AB : BC : CA を，α_1, α_2, α_3, S_1, S_2, S_3 を用いて表せ。

（以下余白）

3 a を正の定数とする。次の等式が成り立つとき，$\log a$ の値を求めよ。

$$\frac{\displaystyle\int_1^e \log(ax)\,dx}{\displaystyle\int_1^e x\,dx} = \int_1^e \frac{\log(ax)}{x}\,dx$$

4 p を自然数とし，r を 1 より大きい実数とする。数列 a_n $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ は次の条件 (i), (ii), (iii) をすべて満たしている。

(i) $a_n = r^{n-1} + \dfrac{1}{r^{n-1}}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$

(ii) $a_2 = p$

(iii) $a_3 \leqq 13$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) すべての自然数 n について，$a_{n+2} = pa_{n+1} - a_n$ が成り立つことを証明せよ。

(2) p および r の値を求めよ。

(3) m を自然数とする。$2m$ 個の数 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{2m}$ のうち，3 の倍数であるものすべての和を求めよ。

（問題終り）

（以下余白）