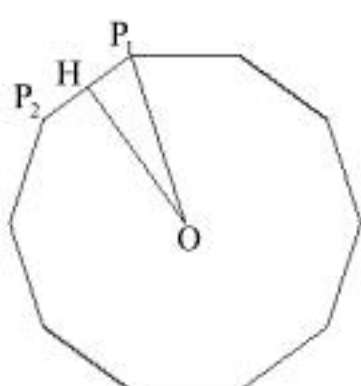


1

(1)



上図のように、点Hを P_1P_2 上にOHが P_1P_2 と垂直になるようにとる。正十角形の内角1つあたりの角度は 144° となるから、 $\angle OP_1H = 72^\circ$ となる。 $\angle P_1HO = 90^\circ$ であるため $\angle HOP_1 = 18^\circ$ となる。ここで $OP_1 = R$ であり $P_1H = \frac{1}{2}P_1P_2 = \frac{1}{2}$ となるから、 $R \sin 18^\circ = OP_1 \sin \angle HOP_1 = P_1H = \frac{1}{2}$ と

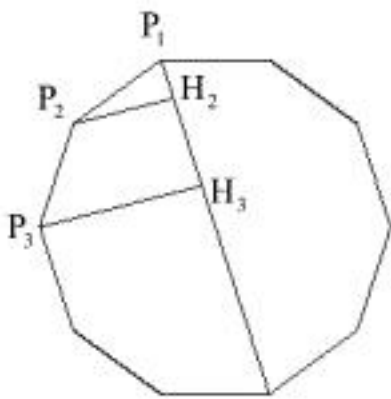
なることがわかる。よって、 $\frac{1}{\sin \theta}$ が $0^\circ < \theta < 90^\circ$ の範囲で狭義単調減少であることも考慮すれば、

$$\theta_1 = 18^\circ$$

であることがわかる。

(答) 18°

(2)



(1)と同様にして、 $\angle P_1P_2H_2 = 18^\circ$ となるから

$$P_1H_2 = P_1P_2 \sin \angle P_1P_2H_2 = \sin 18^\circ$$

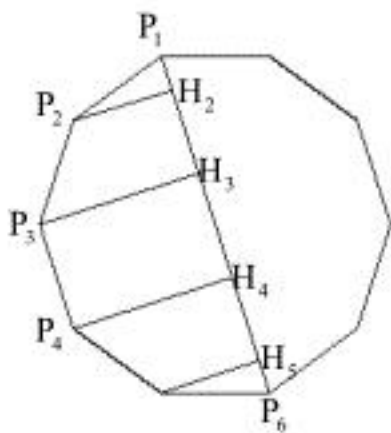
となる。よって、 $\theta_2 = 18^\circ$ となる。次に $\angle P_1P_2P_3 = 144^\circ$ 、 $\angle OP_1P_2 = 72^\circ$ 、 $\angle P_1H_2P_3 = 90^\circ$ であることより $\angle P_2P_3H_3 = 54^\circ$ となる。また、線分 P_2H_2 と P_3H_3 が平行であることより点 P_2 と線分 P_3H_3 の距離は線分 H_2H_3 の長さとも一致する。よって、

$$H_2H_3 = P_2P_3 \sin 54^\circ = P_2P_3 \cos 36^\circ = \cos 36^\circ$$

となる。したがって、 $\theta_3 = 36^\circ$ となる。

(答) $\theta_2 = 18^\circ$ 、 $\theta_3 = 36^\circ$

(3)



線分 P_3H_3 と線分 P_4H_4 は平行であるため $H_3H_4 = P_3P_4 = 1$ となる。また、 $P_1H_2 = P_6H_5$ であるため

$P_1H_2 + H_2H_3 + H_3H_4 = \frac{1}{2}P_1P_6$ が成り立つ。よって(1), (2)より、

$$P_1P_6 = 2R$$

$$\therefore 1 + 2 \sin 18^\circ + 2 \cos 36^\circ = \frac{1}{\sin 18^\circ}$$

が成り立つ。ここで $\sin 18^\circ = x$ とおくと、三角関数の倍角公式より、

$$1 + 2x + 2(1 - 2x^2) = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow -4x^3 + 2x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(4x^2 + 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

が得られる。また、 $0 = \sin 0^\circ < \sin 18^\circ < \sin 90^\circ = 1$ となるから、

$$\sin 18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

となる。

(答) $\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$

(4)

$\triangle OP_1P_2 = \frac{1}{2}R^2 \sin 36^\circ$ であるから、三角関数の倍角公式より、

$$S = \frac{1}{2}R^2 \sin 36^\circ \times 10$$

$$= 10R^2 \cos 18^\circ \sin 18^\circ$$

となる。よって、

$$S^2 = 100R^4 \cos^2 18^\circ \sin^2 18^\circ$$

$$= 100 \left(\frac{1}{2 \sin 18^\circ} \right)^4 (1 - \sin^2 18^\circ) \sin^2 18^\circ$$

$$= \frac{25}{4} \left(\frac{1}{\sin^2 18^\circ} - 1 \right)$$

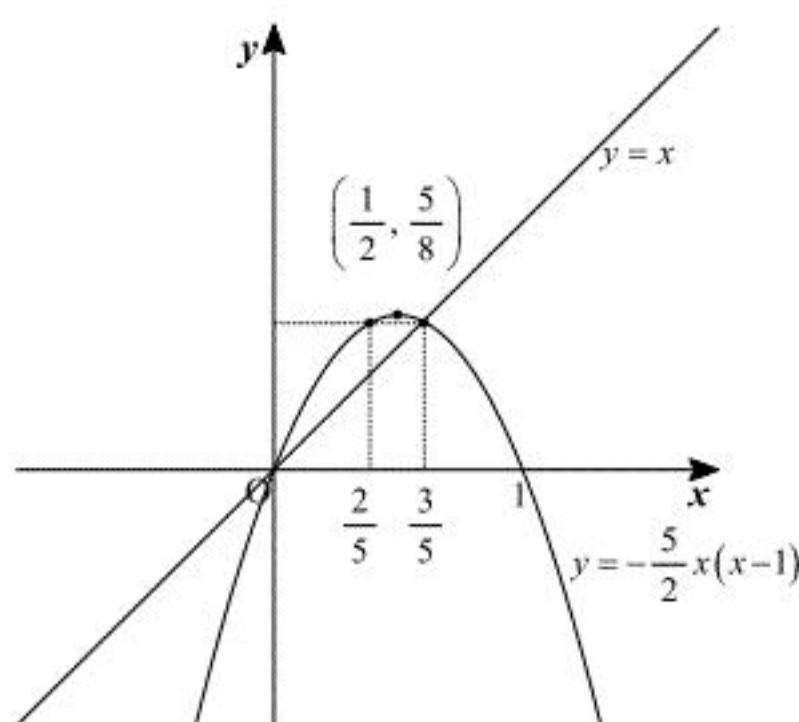
$$= \frac{25}{4} \left\{ \left(\frac{4}{-1 + \sqrt{5}} \right)^2 - 1 \right\}$$

$$= \frac{25}{4} (5 + 2\sqrt{5})$$

となる。

(答) $\frac{25}{4} (5 + 2\sqrt{5})$

(1)



xy 平面上に函数 $y=f(x)$ と直線 $y=x$ のグラフを描くと上図のようになる。 $a < b = f(a)$ となるのは、放物線 $y=f(x)$ が直線 $y=x$ の上側にあるときであるから、このときの x 座標の範囲を考えれば、

$$0 < a < \frac{3}{5}$$

と求まる。

(答) $0 < a < \frac{3}{5}$

(2)

連立不等式

$$\begin{cases} a < b \\ b > c \end{cases} \quad \begin{array}{l} \cdots \textcircled{1} \\ \cdots \textcircled{2} \end{array}$$

を満たす a の範囲を求める。まず、(1)より

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow 0 < a < \frac{3}{5}$$

であるから、この範囲で考えればよい。このとき、上図より b のとり得る値の範囲は、

$$0 < b < \frac{5}{8}$$

である。また、 $x > 0$ において $x > f(x)$ となるような x の範囲を考えると、上図より、

$$\frac{3}{5} < x$$

であるから、 $b > c = f(b)$ となるような b の範囲は

$$b > \frac{3}{5}$$

である。さらに、 $b = f(a) > \frac{3}{5}$ となるような a の範囲は、上図より、

$$\frac{2}{5} < a < \frac{3}{5}$$

であるから、求める a の範囲は

$$0 < a < \frac{3}{5} \quad \text{かつ} \quad \frac{2}{5} < a < \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{5} < a < \frac{3}{5}$$

である。

(答) $\frac{2}{5} < a < \frac{3}{5}$

(3)

(2)の連立不等式が成り立つとき、 b のとり得る値の範囲は

$$\frac{3}{5} < b \leq \frac{5}{8}$$

であり、ここで $\frac{5}{8} < 1$ であることに注意すると、 $c = f(b)$ のとり得る値の範囲は、上図より、

$$0 < c < \frac{3}{5}$$

の範囲に含まれることがわかる。よって、上図から

$$c < f(c)$$

となることがわかる。

(答) $c < f(c)$

3

(1)

曲線 C_1 について、

$$\begin{aligned} y &= ax^2 \\ y' &= 2ax \end{aligned}$$

であり、曲線 C_2 について、

$$\begin{aligned} y &= (\log x)^m \\ y' &= m(\log x)^{m-1} \cdot \frac{1}{x} \end{aligned}$$

となるから、点 P の x 座標を t とおくと、

$$\begin{cases} at^2 = (\log t)^m & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2at = m(\log t)^{m-1} \cdot \frac{1}{t} & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

が成り立つ。①、②より t^2 の項を消去すると、

$$\begin{aligned} m(\log t)^{m-1} &= 2(\log t)^m \\ \therefore t &= e^{\frac{m}{2}} \end{aligned}$$

が成り立つ。これを①に代入すると

$$\begin{aligned} ae^m &= \left(\frac{m}{2}\right)^m \\ \Leftrightarrow a &= \left(\frac{m}{2e}\right)^m \end{aligned}$$

となる。

(答) $a = \left(\frac{m}{2e}\right)^m$, P の x 座標 : $e^{\frac{m}{2}}$

(2)

$f(x) = \frac{(\log x)^m}{x^2}$ を微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left\{m(\log x)^{m-1} \cdot \frac{1}{x}\right\}x^2 - 2x(\log x)^m}{x^4} \\ &= \frac{(\log x)^{m-1}(m - 2\log x)}{x^3} \end{aligned}$$

となる。よって、 $x \geq 1$ における $f(x)$ の増減表は

x	1	...	$e^{\frac{m}{2}}$	...
$f'(x)$	0	+	0	-
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(e^{\frac{m}{2}}\right)$	$\searrow$

となるから、 $f(x) \leq f\left(e^{\frac{m}{2}}\right) = \left(\frac{m}{2e}\right)^m = a$ となる。よって、 $x \geq 1$ において、

$$\begin{aligned} \frac{(\log x)^m}{x^2} &\leq a \\ \therefore (\log x)^m &\leq ax^2 \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)

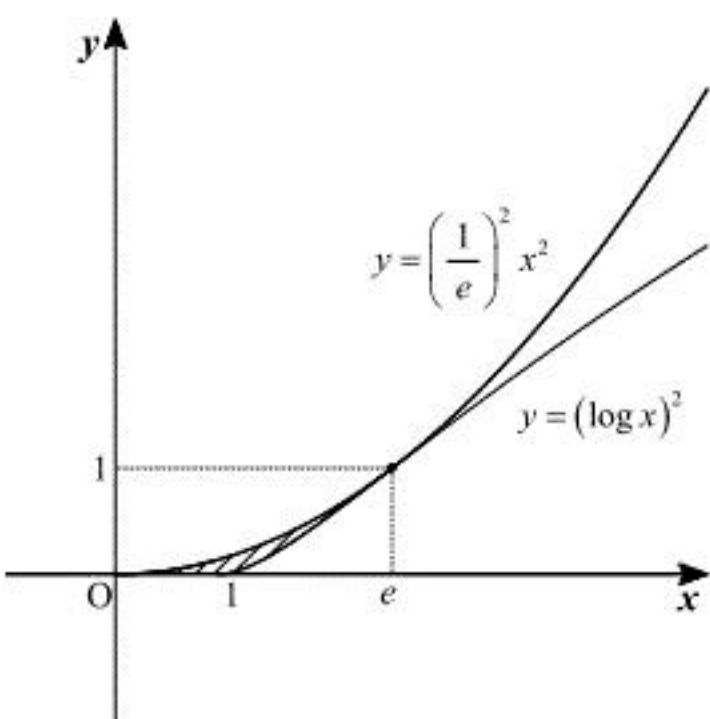
部分積分法により、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} I_n &= \int (\log x)^n dx \\ &= \int 1 \cdot (\log x)^n dx \\ &= x(\log x)^n - \int x \left\{n(\log x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x}\right\} dx \\ &= x(\log x)^n - nI_{n-1} \end{aligned}$$

となる。

(答) $I_n = x(\log x)^n - nI_{n-1}$

(4)



(1)より、 C_1 、 C_2 の交点の x 座標は $m = 2$ のとき e となる。また求める部分の面積を S とおくと、

(2)より $x \geq 1$ において $ax^2 \geq (\log x)^m$ であるから、

$$S = \int_0^1 ax^2 dx + \int_1^e \left\{ax^2 - (\log x)^2\right\} dx$$

となる。これを計算すると

$$\begin{aligned} S &= \frac{a}{3}e^3 - \left[x(\log x)^2\right]_1^e + 2[x \log x - x]_1^e \\ &= \frac{a}{3}e^3 - e + 2 \end{aligned}$$

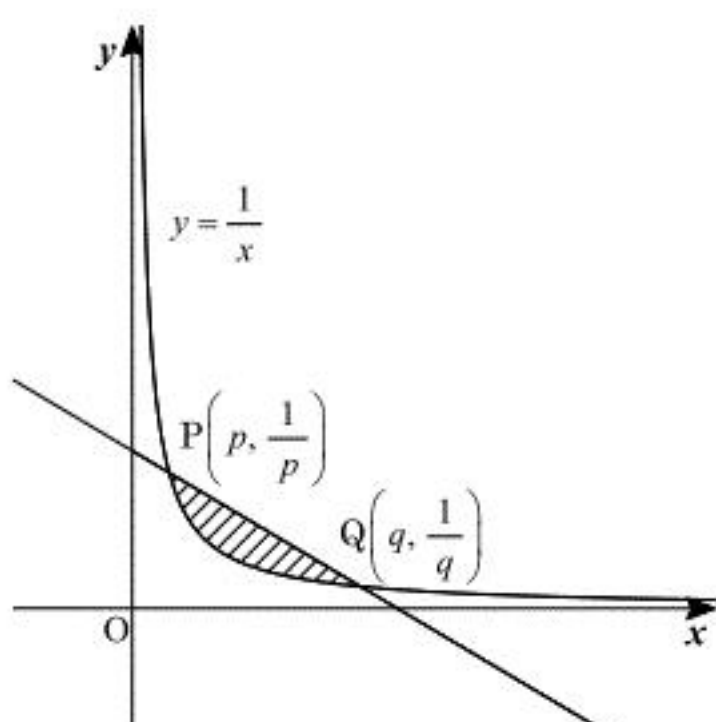
となる。(1)より $m = 2$ のとき $a = \frac{1}{e^2}$ となるため、

$$S = 2 - \frac{2}{3}e$$

となる。

(答) $2 - \frac{2}{3}e$

(1)



求める面積は、上図の斜線部である。直線PQの方程式は

$$y = \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}{p - q}(x - p) + \frac{1}{p}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{pq}x + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

であるから、

$$S = \int_p^q \left\{ \left(-\frac{1}{pq}x + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) - \frac{1}{x} \right\} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{(p+q-x)^2}{pq} \right]_p^q - [\log x]_p^q$$

$$= -\frac{p}{2q} + \frac{q}{2p} - \log \frac{q}{p}$$

$$= \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) - \log r \quad \left(\because r = \frac{q}{p} \right)$$

となる。また、求める体積は上図の斜線部をx軸のまわりに1回転してできる回転体の体積であるから、

$$V = \pi \int_p^q \left\{ \left(-\frac{1}{pq}x + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right)^2 - \left(\frac{1}{x} \right)^2 \right\} dx$$

$$= \pi \left[-\frac{1}{3} \cdot \frac{(p+q-x)^3}{(pq)^2} \right]_p^q - \pi \left[-\frac{1}{x} \right]_p^q$$

$$= \pi \left(-\frac{p}{3q^2} + \frac{q}{3p^2} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \right)$$

$$= \frac{\pi}{3pr^2} (-1 + r^3 + 3r - 3r^2)$$

$$= \frac{\pi}{3} \frac{(r-1)^3}{pr^2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) - \log r, \quad V = \frac{\pi}{3} \frac{(r-1)^3}{pr^2}$$

(2)

$p = 3^{n-1}$, $q = 3^n$ のとき, (1)より

$$V_n = \frac{\pi}{3} \frac{8}{9 \cdot 3^{n-1}}$$

$$= \frac{8}{9} \left(\frac{1}{3} \right)^n \pi$$

となる。したがって、求める無限級数の和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \frac{8}{9} \pi \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^k$$

$$= \frac{8}{9} \pi \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{4}{9} \pi$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{4}{9} \pi$$